APUNTES DE MECÁNICA DE MATERIALES

ELABORADOS POR:

ING. LEONARDO ÁLVAREZ LEÓN

ING. MANUEL GÓMEZ GUTIÉRREZ

ING. OMAR ULISES MORALES DÁVILA

Unidad 1. CONCEPTOS BÁSICOS.

Objetivo: Identificará los conceptos básicos del comportamiento mecánico de los materiales empleados en estructuras.

Temas:

1.1.- Ubicación de la resistencia de materiales en la mecánica.

1.2.- Ubicación de la resistencia de los materiales en el área estructural.

1.3.- Concepto de esfuerzo normal y esfuerzo cortante.

1.4.- Concepto de deformación lineal, deformación unitaria y deformación angular.

1.5.- Elasticidad y Plasticidad.

1.1.- Ubicación de la resistencia de materiales en la mecánica.

Introducción:

En este tema se establecerá el lugar que tiene la Resistencia de Materiales dentro de la mecánica.

La resistencia de materiales se deriva de la mecánica existiendo una diferencia entre ambas. En el campo de la mecánica se abarcan las relaciones entre las fuerzas que actúan dentro de un sólido indeformable. En contraste, la resistencia de materiales establece las relaciones entre las cargas externas y sus efectos en el interior de los sólidos idealmente deformables.

Objetivo(s):
Identificar la ubicación de la Resistencia de Materiales en la Mecánica.

Desarrollo:

Mecánica es una de las ramas de la física que se ocupa del movimiento de los objetos y de su respuesta a las fuerzas.

La mecánica abarca las relaciones entre las fuerzas que actúan sobre un sólido indeformable.

En contraste con la mecánica, la *resistencia de materiales* estudia y establece las relaciones entre las cargas exteriores aplicadas y sus efectos en el interior de los sólidos. Es decir, la resistencia de materiales es una rama de la mecánica aplicada que trata del comportamiento de los cuerpos sólidos sometidos a varios tipos de carga.

Otros nombres para este campo de estudio son: mecánica de materiales o mecánica de los cuerpos deformables.

El objetivo principal de la resistencia de materiales es determinar los esfuerzos, deformaciones y desplazamientos en estructuras y sus componentes debido a las cargas que actúan sobre ellas.

Entender el comportamiento mecánico es esencial para el diseño seguro de todos los tipos de estructuras.

La estática y la dinámica también son esenciales, pero la estática estudia los sólidos en equilibrio y la dinámica estudia los sólidos acelerados; pero siempre consideran a los cuerpos como indeformables, mientras que la resistencia de materiales examina los esfuerzos y deformaciones dentro de los cuerpos reales; es decir, cuerpos de dimensiones finitas que se deforman bajo carga.

Elementos mecánicos:

Como ya se mencionó anteriormente, la resistencia de materiales estudia la distribución interna de esfuerzos que produce un sistema de fuerzas exteriores aplicadas. Las fuerzas que actúan internamente en un elemento son:

Fuerza Axial:
Esta componente corresponde a la acción de tirar o empujar sobre la sección. Tirar (o jalar) representa una fuerza de extensión o tracción que tiende a alargar el sólido, mientras que empujar representa una fuerza de compresión que tiende a acortarlo. Se representa generalmente por P.

Fuerzas cortantes:
Son componentes de la resistencia total al deslizamiento de la porción de sólido a un lado de la sección de exploración respecto de la otra porción. La fuerza cortante suele representarse por V y sus componentes V_x y V_y determinan su dirección.

Momento torsionante:
Este componente mide la resistencia a la torsión del sólido considerado, y se suele representar por T.

Momentos flexionantes:
Miden la resistencia del cuerpo a curvearse o flexionarse respecto a los ejes Y o Z, y se suelen expresar por M_y y M_z.

1.2.- Ubicación de la resistencia de los materiales en el área estructural.

Introducción:

En este tema se establecerá el lugar que tiene la Resistencia de Materiales dentro del área estructural.

Uno de los problemas básicos de la ingeniería es seleccionar el material más apropiado y dimensionarlo correctamente, de manera que permita que la estructura o máquina proyectada trabaje con la mayor eficacia, para ello es esencial determinar la resistencia, la rigidez y otras propiedades de los materiales.

Objetivo(s):

Identificar la ubicación de la Resistencia de Materiales dentro del área estructural.

Desarrollo:

Como ya se mencionó, entender el comportamiento mecánico es esencial para el diseñar con seguridad todos los tipos de estructuras. Con un estudio de resistencia de materiales al diseñar estructuras podemos saber que material utilizar, su geometría y disposición de elementos resistentes que soporten las cargas, que no se deforman demasiado o dentro de ciertos límites, etc.

Los estructurales no trabajan en forma aislada, sino en conjunto con otros miembros estructurales. Las estructuras pueden estar sometidas a las siguientes solicitaciones:

Cargas muertas:
Se consideran como cargas muertas a los pesos de todos los elementos constructivos, los acabados y todos los elementos que ocupan una posición permanente y que tienen un peso que no cambia de forma substancial con el paso del tiempo.

Cargas vivas:
Se consideran cargas vivas a todas aquellas fuerzas que se producen por el uso y ocupación de las construcciones y no tienen un carácter permanente.

Cargas accidentales:
Son aquellas que pueden alcanzar valores significativos en lapsos breves de tiempo. Entre ellas tenemos: sismo, viento, nieve y granizo, impactos, etc.

No consideradas en las anteriores, pero importantes al diseñar estructuras, tenemos los efectos por cambios de volumen por temperatura.

Toda estructura, bajo la acción de las distintas solicitaciones, tendrá una respuesta buscando un equilibrio.

Al diseñar estructuras se debe de considerar:
1.- Las variaciones en las propiedades de los materiales.
2.- Los ciclos de cargas esperadas.
3.- Los tipos de cargas a los que se diseñan hoy y para el futuro.
4.- Tipo posible de falla (dúctil ó frágil).
5.- La incertidumbre de los métodos de análisis, mismos que se basan en hipótesis simplificadoras.
6.- El mantenimiento de las estructuras.
7.- La importancia estructural del o los elemento(s).
8.- El valor de la vida.

Todo lo anterior de forma tal que se cumpla con el objetivo básico de la Ingeniería Civil que se resume al diseñar estructuras que cumplan con:

- Seguridad.
- Economía.
- Funcionalidad.

1.3.- Concepto de esfuerzo normal y esfuerzo cortante.

Introducción:

En este tema se conocerán las solicitaciones y respuestas a las que se ve sometido un cuerpo y los esfuerzos normales y cortantes que se producen debido a los mismos.

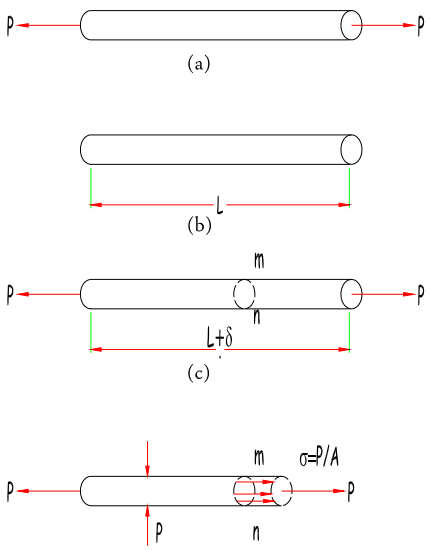
La fuerza por unidad de área que soporta un material se denomina esfuerzo normal. Este esfuerzo de tensión o compresión tiene lugar en una sección perpendicular a la carga y lo que generalmente se usa es un esfuerzo uniforme o promedio, resultado de dividir la carga entre el área sobre la que actúa.

El esfuerzo cortante es producido por fuerzas que actúan paralelamente al plano que las resiste. También se denominan esfuerzos tangenciales y aparecen siempre que las fuerzas aplicadas obliguen a una sección del sólido a deslizarse sobre la sección adyacente.

Objetivo(s):
Que el alumno logre identificar las diversas solicitaciones y respuestas a las que se somete un cuerpo y plantear los esfuerzos normales y cortantes.

Desarrollo:

Observe las siguientes figuras.



El caso más sencillo es el de una barra metálica recta, de sección constante, sometida en sus extremos a dos fuerzas axiales colineales dirigidas en sentidos opuestos (ya sea en tensión o compresión) y que actúan en el centro de las secciones. Para que haya equilibrio estático las magnitudes de las fuerzas deben de ser iguales.

Bajo la acción de estas fuerzas aplicadas se originan otras fuerzas internas dentro de la barra que pueden estudiarse imaginando un plano que la corte en un punto cualquiera y sea perpendicular a su eje longitudinal.

Ahora bien, la carga axial P representa la resultante de la sume de las pequeñas fuerzas internas que actúan en la sección (ΔP), aplicadas sobre pequeñas áreas (ΔA), por lo que se establece la siguiente fórmula de esfuerzo promedio en una sección.

$$\sigma_{prom} = \frac{\Sigma \Delta P}{\Sigma \Delta A} = \frac{P}{A}$$

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

En donde:

σ = esfuerzo o fuerza por unidad de área
P = carga aplicada
A = área de la sección transversal

La hipótesis anterior es el resultado de la simplificación de métodos complejos de análisis elásticos y métodos experimentales como la fotoelasticidad.

Esta ecuación es válida únicamente en los siguientes casos:

- Si el esfuerzo está uniformemente distribuido sobre la sección transversal de la barra.
- Si la fuerza axial P actúa a través del centroide del área de la sección transversal.

Cuando la carga P no pasa por el centroide, se tendrá una flexión en la barra, por lo cual se requerirá una un análisis más complicado.

1.4.- Concepto de deformación lineal, deformación unitaria y deformación angular

Introducción:

En este tema se analizarán los conceptos de deformación provocados por esfuerzos normales y cortantes.

Debido a la aplicación de fuerzas externas sobre los cuerpos y, con ello, generarse esfuerzos, surgen deformaciones o cambios de longitud en su sección transversal, longitudinal o bien, angulares. Estas deformaciones son esenciales para estudios de deformaciones permanente o momentáneas.

Objetivo(s):

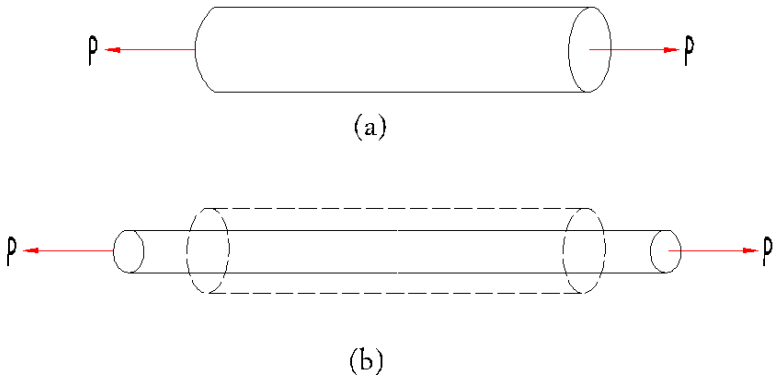
Analizar los conceptos deformación lineal, deformación unitaria y deformación angular.

Desarrollo:

Entendemos por deformación al cambio de forma o longitud de un cuerpo debido a la aplicación de fuerzas.

Deformación lineal:

Consideremos la barra siguiente:



Al aplicar la carga P a dicha barra, esta sufre una deformación, la cual puede calcularse mediante las siguientes expresiones.

$$\delta = L_f - L_i \qquad \text{en caso de incremento de longitud}$$

$$\delta = L_i - L_f \qquad \text{en caso de decremento de longitud}$$

En donde:

δ = deformación lineal
L_f = longitud final del elemento
L_i = longitud inicial del elemento

Dicha deformación se le llamará normal siempre y cuando cumpla con las siguientes características:

1. La sección transversal recta del material debe de ser constante.
2. El material debe de ser homogéneo.
3. La carga debe de ser axial; es decir, producir esfuerzos uniformes.

Deformación unitaria normal:

Como ya vimos, una barra recta cambiará de longitud al cargarla axialmente, volviéndose más larga en tensión y más corta en compresión. Por ejemplo, si aplicamos una carga axial a tensión sobre una barra, ésta sufrirá una alargamiento δ, resultado acumulativo del alargamiento de todos los elementos del material en todo el volumen de la barra. Entonces, si consideramos la mitad de la barra (longitud L/2), ésta tendrá un alargamiento igual a $\delta/2$, y si consideramos un cuarto de barra (L/4), esta tendrá un alargamiento igual a $\delta/4$. En general el alargamiento de un segmento es igual a su longitud dividida entre la longitud total L y multiplicada por el alargamiento total *e*. Por lo tanto, una unidad de longitud de la barra tendrá un alargamiento igual a

1/L veces *e*. Esta cantidad se denomina alargamiento por unidad de longitud o deformación unitaria, que se representa con la letra épsilon (ε).

En resumen, se entiende por deformación unitaria a el valor que resulta de dividir el incremento de longitud entre la longitud inicial del elemento. Se expresa con la siguiente fórmula:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_i}$$

Siendo un parámetro adimensional y en donde:

ε *= deformación unitaria normal*
δ *= deformación lineal ó incremento de longitud*
L_i *= longitud inicial del elemento*

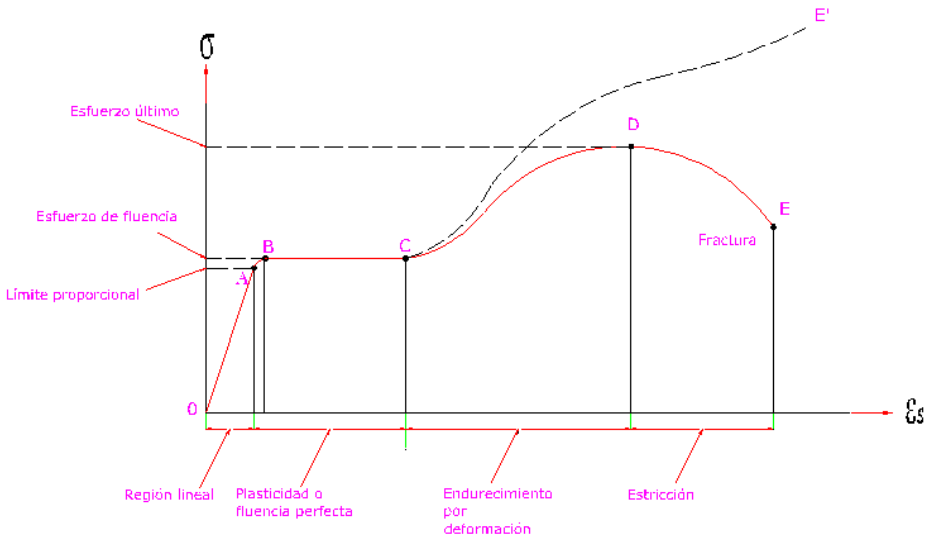
Esta ecuación expresa la proporción de deformación en elementos constituidos por el mismo material y dimensiones distintas.

Si la barra está a tensión, la deformación unitaria se llama deformación unitaria a tensión, que representa un alargamiento o estiramiento del material. Si la barra está en compresión, se dice que es una deformación unitaria a compresión y la barra se acorta. En términos generales, la deformación unitaria a tensión se considera positiva, mientras la deformación unitaria a compresión, negativa.

Se le denomina deformación unitaria normal porque está asociada con esfuerzos normales.

Los valores numéricos de la deformación unitaria suelen ser muy pequeños, porque las barras hechas de materiales estructurales solo sufren pequeños cambios de longitud al ser cargadas. En ocasiones, la deformación unitaria se expresa como porcentaje, sobre todo cuando suelen ser muy grandes.

Gráfica de esfuerzo vs deformación unitaria ($\sigma - \varepsilon$):



Los resultados de las pruebas de laboratorio dependen, en general, del tamaño de la probeta ensayada.

Difícilmente se diseña una estructura con partes del mismo tamaño de las probetas de prueba, por tal motivo, los resultados se deben de expresar de tal manera que puedan aplicarse a miembros de cualquier tamaño. Una forma fácil de lograr esto es convertir los resultados de las pruebas en esfuerzos y deformaciones unitarias.

Para efectos prácticos de este curso debemos de entender los siguientes conceptos:

- **Esfuerzo nominal:** es el resultado de dividir la carga axial *P* entre el área inicial de la probeta; es decir, entre el área de la probeta antes de la prueba.
- **Esfuerzo verdadero:** es el resultado de dividir la carga axial *P* entre el área real de la barra en la sección transversal en donde ocurre la falla. Este es un valor más exacto del esfuerzo axial y como el área real en una prueba de tensión es siempre menor que el área inicial, el esfuerzo verdadero es mayor que el esfuerzo nominal.
- **Deformación unitaria nominal:** es el resultado de dividir el alargamiento medido *e* entre la longitud calibrada inicial de la barra; es decir, la longitud calibrada de la barra antes de la prueba.
- **Deformación unitaria verdadera:** es el resultado de dividir el alargamiento medido e entre la longitud de la barra después de la prueba. Dado a que a que la distancia entre las marcas de calibración crece conforme se aplica la carga, la deformación unitaria verdadera siempre es menor que la deformación unitaria nominal.

Sin embargo, para la mayoría de los fines ingenieriles, el esfuerzo nominal y la deformación unitaria nominal son adecuados para su uso.

Después de efectuar una prueba a tensión o compresión y determinar el esfuerzo y la deformación unitaria para varias magnitudes de carga, puede trazarse un diagrama del esfuerzo *vs.* deformación unitaria. Tal diagrama es una característica particular del material que se está probando y contiene información importante sobre las propiedades mecánicas y tipo de comportamiento.

Ejemplifiquemos con el diagrama de esfuerzo – deformación unitaria del acero estructural. Las deformaciones unitarias se trazan sobre el eje horizontal y los esfuerzos sobre el eje vertical.

El diagrama podemos explicarlo de la siguiente manera:

1. El diagrama comienza con una línea recta que va del origen 0 al punto A, lo que significa que la relación entre el esfuerzo y la deformación unitaria en esta región inicial no es solo lineal, sino también proporcional. A la pendiente de esta línea recta se le llama **módulo de elasticidad.**
2. El **punto A** se llama **límite proporcional**, pues más allá de este punto la proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación unitaria ya no existe.
3. Al incrementar el esfuerzo más allá de del límite proporcional (punto A), la deformación unitaria comienza a crecer con mayor rapidez para cada incremento de esfuerzo; en consecuencia, la curva esfuerzo – deformación unitaria tiene una pendiente cada vez menor hasta llegar al punto B.
4. Del punto B al punto C ocurre un considerable alargamiento de la probeta de prueba sin presentarse un incremento perceptible en el esfuerzo, es por ello que la curva en esta zona se vuelve prácticamente horizontal. Este fenómeno se conoce como **fluencia** del material. Al punto B se le conoce como **punto de fluencia** y al esfuerzo correspondiente de esta zona como **esfuerzo de fluencia o resistencia de fluencia**. En la región B a C, el material se vuelve perfectamente plástico, lo que significa que se deforma sin un incremento de la carga aplicada.
5. Después de las grandes deformaciones unitarias presentadas en el tramo B a C, el acero empieza a **endurecerse por deformación**. Durante esta etapa el material experimenta cambios en su estructura cristalina, lo que conduce a una resistencia mayor del material a deformaciones adicionales. El alargamiento de la probeta de prueba en esta región requiere un incremento de carga a tensión, por lo que el diagrama esfuerzo – deformación unitaria tiene una pendiente positiva de C a D. La carga termina por alcanzar su valor máximo y su esfuerzo correspondiente en el punto D, al cual se le conoce como **esfuerzo último o resistencia última**.

6. Un alargamiento adicional de la barra va acompañado por una reducción de la carga y la fractura ocurre finalmente en el punto E, o **punto de fractura**.

Límite elástico:

Es el nivel de esfuerzo que alcanza un cuerpo de tal manera que al desaparecer recupera sus dimensiones originales.

Límite de fluencia:

Esfuerzo al que un material fluye sin aceptar mayores solicitaciones.

Deformación angular:

Las fuerzas cortantes producen una deformación angular o distorsión. En el proceso puede imaginarse como producido por el desplazamiento infinitesimal o resbalamiento de capas delgadas del elemento una sobre otras. Siendo la suma de estos resbalamientos la deformación transversal total δ_s sobre una longitud L que transforma a un rectángulo en un paralelogramo.

1.5.- Elasticidad y plasticidad

Introducción:
En este tema se conocerán los conceptos del comportamiento elástico y plástico de los distintos materiales.

Es importante determinar el comportamiento elástico o plástico de los cuerpos, ya que ello repercute en la óptimo comportamiento de las estructuras.

Objetivo(s):
Distinguir los conceptos de elasticidad y plasticidad.

Desarrollo:

En la sección anterior vimos el comportamiento de un material cuando es sometido a una carga de tensión o compresión. Consideremos ahora lo que sucede cuando la carga se retira y el material se descarga.

Por ejemplo, supongamos que se aplica una carga a tensión a una probeta y el comportamiento es como sigue:

1. Al aplicar la carga, el esfuerzo y la deformación unitaria van del origen 0 al punto A.

2. Cuando la carga se retira, el material sigue la misma curva de regreso al origen 0. esta propiedad mediante el cual un material recupera sus dimensiones originales al ser descargado se llama **elasticidad** y se dice que el material es elástico (nótese que la curva esfuerzo – deformación unitaria de 0 a A no tiene que ser lineal para que el material sea elástico).

Unidad 2. PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

Objetivo: Conocerá las propiedades de los materiales empleados en estructuras, con base en el comportamiento mecánico de los mismos.

Temas:

2.1.- Principales materiales que se utilizan en la construcción de estructuras.

2.2.- Describir el equipo de prueba e interpretar los resultados analíticos y gráficos de esfuerzo contra deformación de los diferentes materiales aplicando la Ley de Hooke y distinción de la zona elástica de la plástica.

2.3.- Gráficas reales y gráficas convencionales.

2.4.- Ductilidad, fragilidad, homogeneidad, isotropía, anisotropía.

2.1.- Principales materiales que se utilizan en la construcción de estructuras.

Introducción:

En este tema se analizan las propiedades mecánicas de los materiales de mayor uso en nuestro medio, para construir estructuras, como son: concreto, acero, mampostería y madera. Se estudia su comportamiento bajo diferentes tipos de solicitaciones, a partir de sus gráficas carga vs deformación lineal (F vs δ) o esfuerzo vs deformación unitaria (σ vs ε) con la finalidad de obtener de ellos, su máximo aprovechamiento. Se determinan valores del módulo de elasticidad, límite de fluencia y otras propiedades mecánicas que son de empleo frecuente en este curso y en los subsecuentes del área de estructuras.

Es de suma importancia que los conceptos aquí tratados, queden lo mejor asimilados posible por el estudiante, porque los utilizará en semestres posteriores.

Objetivo(s):

Interpretar las gráficas F vs δ o bien las de σ vs ε de los materiales, con el objeto de conocer su respuesta al someterlos a cargas.

Desarrollo:

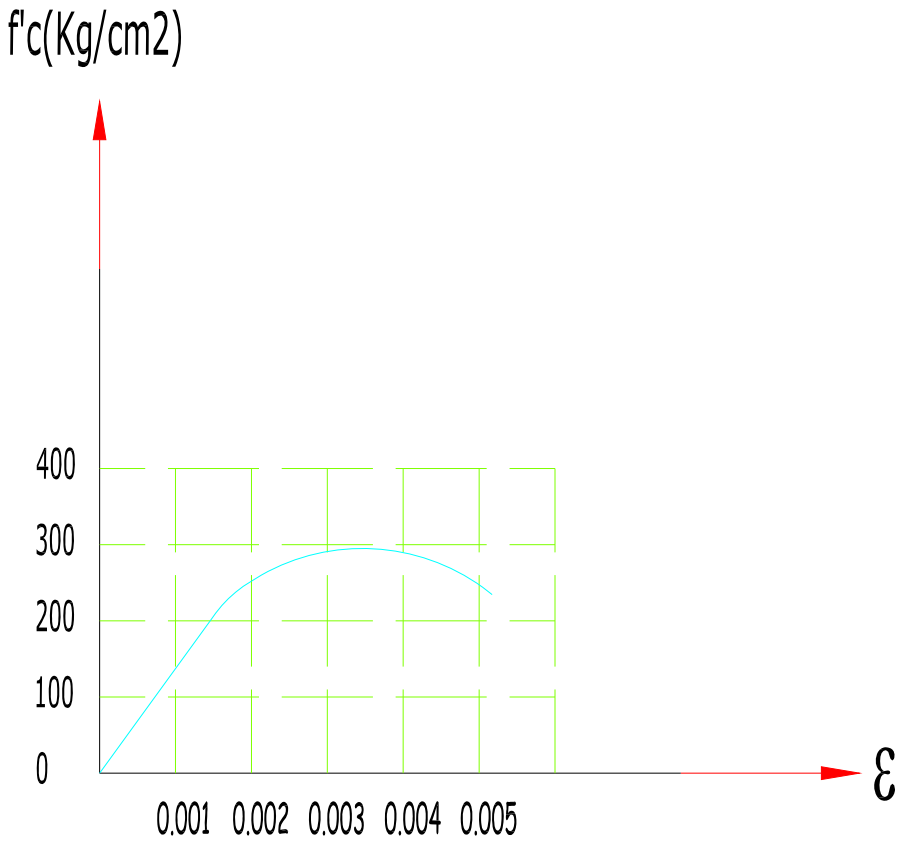
EL CONCRETO SIMPLE:

El concreto simple, es un material económico con notable resistencia a la compresión, pero escasa o prácticamente nula a la tensión. Esta deficiencia se suple con la colocación de refuerzo en las zonas tensionadas mediante varillas corrugadas de acero, fibra de vidrio o bien a través de fibras minerales, convenientemente colocadas, dando lugar al concreto reforzado.

El concreto simple se obtiene de mezclar: cemento+agregados pétreos+agua+aditivos, en cantidades adecuadas. Al combinarse el cemento con el agua se forma una pasta o lechada que es donde tiene lugar el proceso de hidratación denominado fraguado durante el cual, dicha pasta pierde su consistencia plástica. La duración de este proceso varía de 4 a 6 horas, después del cual se logra una roca artificial con la resistencia, forma y dimensiones que el fabricante necesite.

Propiedades mecánicas del concreto endurecido.

La resistencia del concreto depende fundamentalmente de sus componentes, de su proporción relativa y de la adherencia que se desarrolla entre ellos y de otros factores. La prueba a compresión se efectúa en muestras cilíndricas de 30 cm (12 pulgadas) de altura y de 15 cm (6 pulgadas) de diámetro. De este ensaye se obtiene la gráfica σ vs ε como esta:

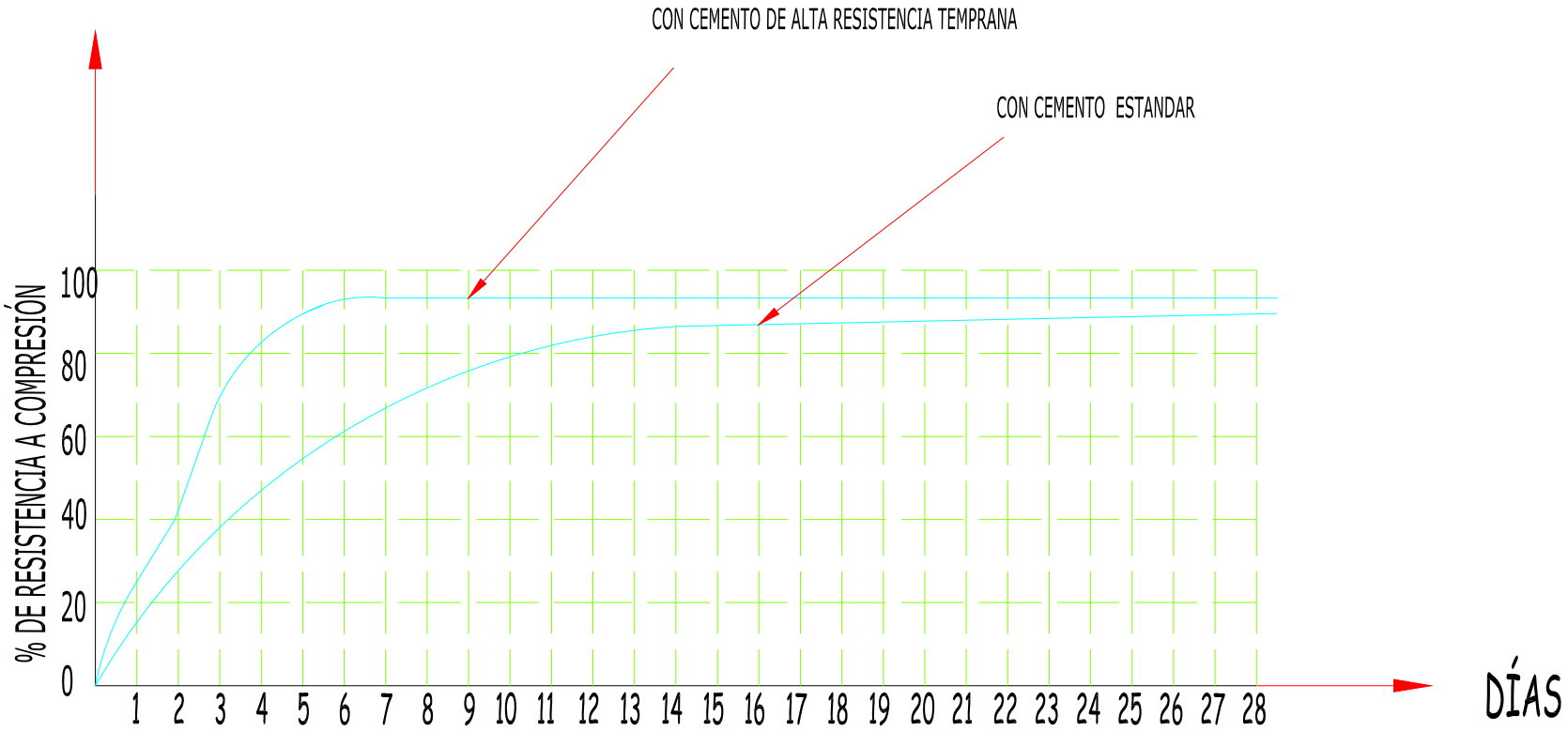


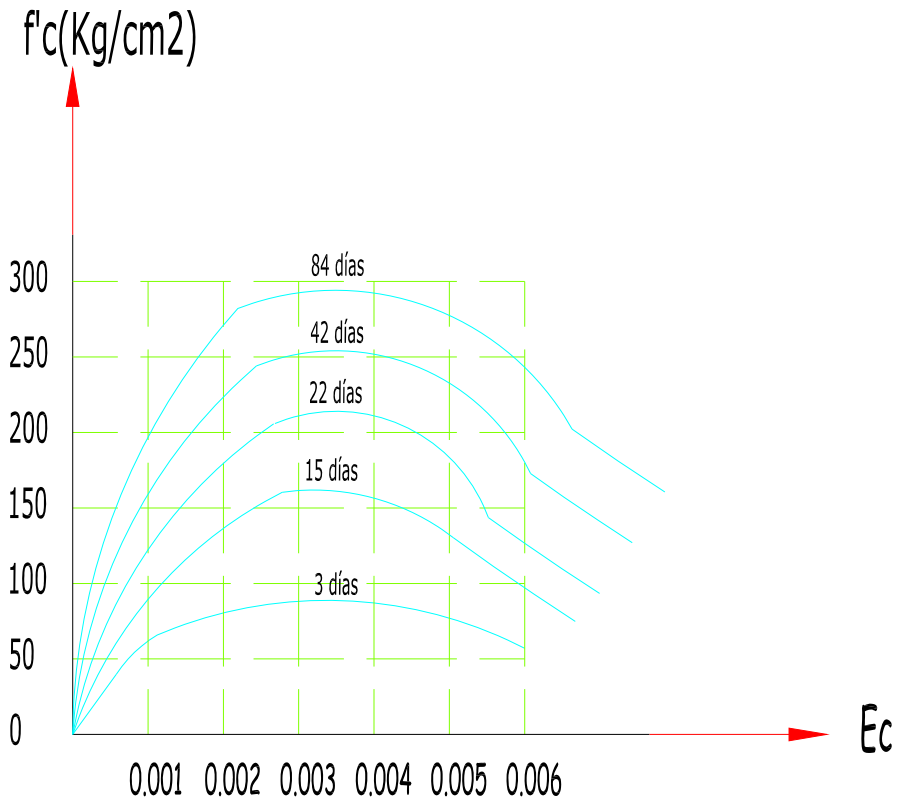
La resistencia máxima a la compresión se denomina f`c expresada en Kg/cm^2 o en Mpa y se presenta en valores de la deformación unitaria entre 0.002 y 0.003.

Factores que afectan la resistencia del concreto.

A) Efecto de la edad.

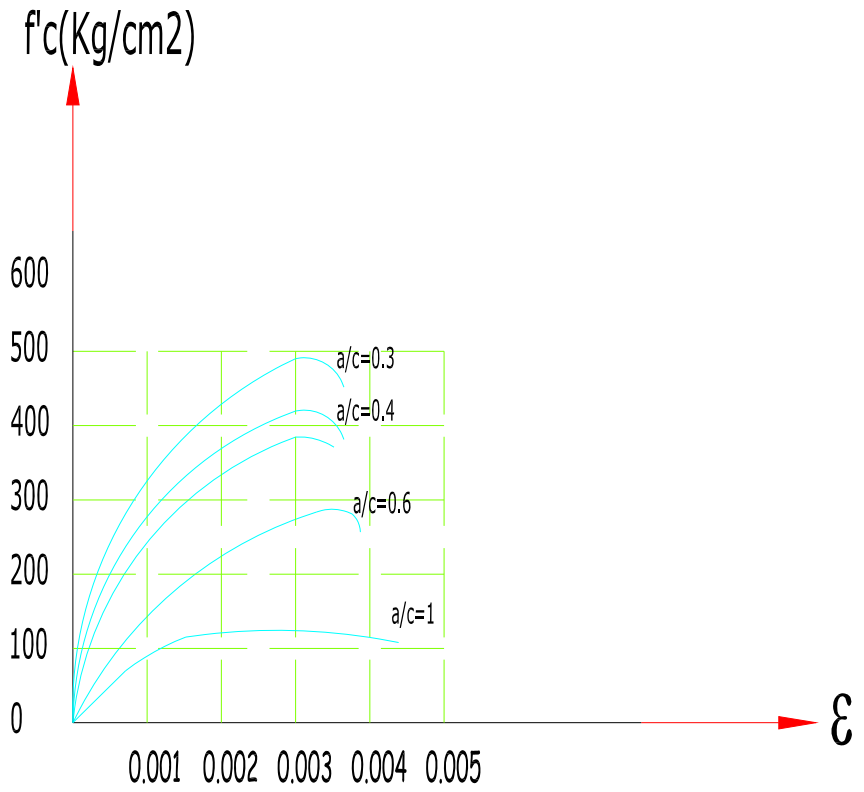
Debido al proceso continuo de hidratación del cemento, el concreto aumenta su resistencia con la edad. Las siguientes gráficas muestran la variación de la capacidad de carga con relación al tiempo.


CON CEMENTO DE ALTA RESISTENCIA TEMPRANA
CON CEMENTO ESTANDAR
% DE RESISTENCIA A COMPRESIÓN
100
80
60
40
20
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28
DÍAS



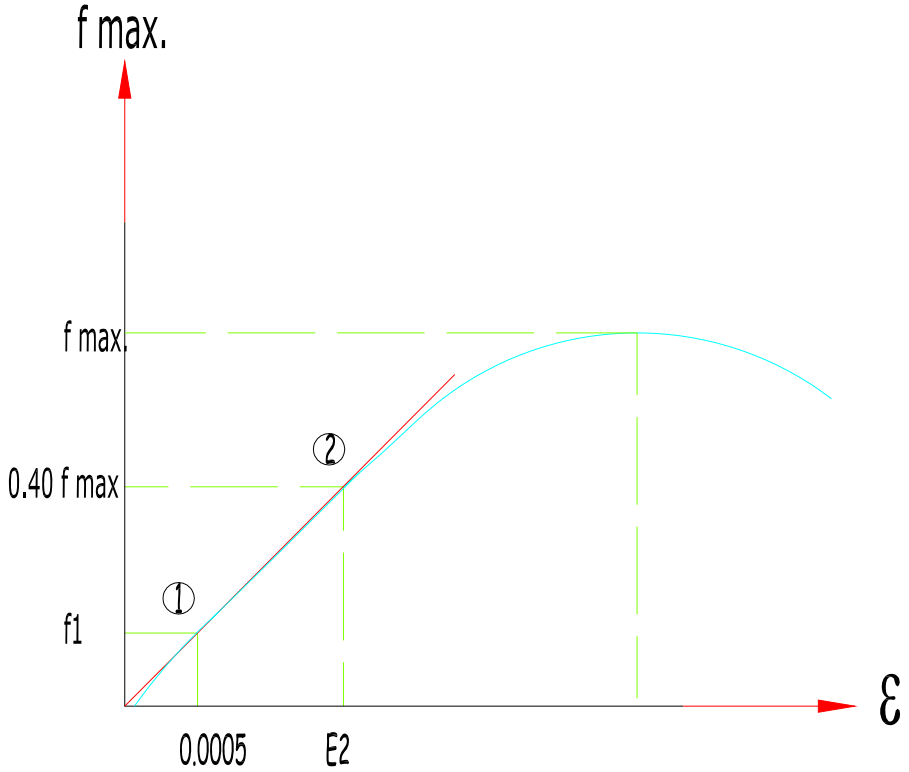
B) Relación agua/cemento.

La resistencia a la compresión del concreto varía fuertemente en relación inversa con la proporción agua/cemento, es decir entre mayor sea la proporción relativa entre el agua y el cemento ya sea en peso o volumen, la resistencia será menor. Este efecto se observa en la gráfica siguiente.



Módulo de elasticidad.

Aun cuando el concreto no es un material elástico propiamente dicho, conviene definir un módulo de elasticidad convencional. La determinación de E, se hace sobre la gráfica σ vs ε, que consiste en obtener la pendiente de una recta en un sector de la curva, limitada por una deformación unitaria de 5 diezmilésimas y por un esfuerzo equivalente al 40% del máximo.



El Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal vigente, propone la consideración de que:

$E=14{,}000v(f'c)^2$ en Kg/cm^2 para concretos clase 1 (peso volumétrico menor o igual a 2,000 Kg/m^3 en estado fresco) con agregado grueso calizo.

$E=11{,}000v\ (f'c)$ en Kg/cm^2 para concretos clase 1 con agregados gruesos basálticos.

$E= 8{,}000v\ (f'c)$ en Kg/cm^2 para concretos clase 2 (peso volumétrico mayor a 2,000 Kg/m^3 en estado fresco).

Módulo de Poisson.

Este módulo relaciona la deformación unitaria transversal (εtransv.) con la longitudinal (εlong.) de una muestra sometida a prueba de tensión o compresión; se designa μ o υ y suele tomarse como valor absoluto, siendo especialmente útil para el diseño de partes de máquinas o experimentos especializados. Para el caso del concreto, este valor varía entre 0.15 y 0.20.

Contracción y flujo plástico.

Las deformaciones en el concreto ocurren por dos causas fundamentales:

1) Contracción:

La deformación por este fenómeno, se debe esencialmente a cambios en el contenido de agua a través del tiempo. El líquido, además de intervenir en el proceso de hidratación del cemento, se evapora. Los valores de esta deformación unitaria varían entre 0.0002 y 0.0010.

2) Flujo plástico:

Es un fenómeno que se produce en el concreto por la aplicación de una carga (como puede ser el peso propio) sin que se cuente en la actualidad con una teoría que explique satisfactoriamente este comportamiento que conduce a deformaciones unitarias permanentes.

EL ACERO:

El material es producto de una mezcla de óxido de fierro+carbón mineral+piedra caliza. Se elabora en un horno a temperaturas del orden de los 1,000 °C; a esta mezcla se le inyecta aire para reducir los óxidos, resultando fierro de primera fusión no utilizable para estructuras por su alta fragilidad. Otro proceso elimina impurezas y adecua la cantidad de carbono con lo que resultan piezas de acero llamadas lingotes o palanquilla. De estos cuerpos, mediante recalentamiento y un proceso de molienda, se elaboran perfiles estructurales y varillas corrugadas para refuerzo de concreto, laminados en caliente. El

troquelado o molienda también puede realizarse en frío, lo que produce aceros de alta resistencia, pero demasiada fragilidad, por lo que no son recomendables para refuerzo de concreto, donde se busca la mayor ductilidad posible.

Propiedades mecánicas.

Módulo de elasticidad.

Los aceros tanto estructurales como para otros fines, tienen un módulo de elasticidad, que es la pendiente de la parte recta de la gráfica esfuerzo- deformación unitaria, (σ vs ε) de signada por E, con un valor de alrededor de 2x106kg/cm2.. y es una propiedad de significativa importancia en los cálculos de estructuras a base de acero y de concreto reforzado. Estas pruebas se efectúen en el laboratorio, ya sea en muestras de varillas corrugadas de diferentes diámetros o en probetas redondas especialmente fabricadas para ensayes de tensión y el equipo genera de manera automática la gráfica σ vs ε.

Esfuerzo de fluencia.

Esfuerzo de fluencia, es el índice de resistencia más empleado para identificar un acero y se designa por fy; este valor sí varía de acuerdo al tipo de acero, que depende del uso que se le dé al material. Para el utilizado como refuerzo de concreto, se sitúa en alrededor de 4,200 Kg/cm^2 a diferencia del estructural cuyo valor está sobre los 2,530 kg/cm^2

Tabla X.X.- Esfuerzos de fluencia de algunos tipos de acero

Tipo	Esfuerzo de fluencia (kg/cm^2)	Esfuerzo de fluencia (lb/in^2)	Alargamiento (%)
A-7	2,320	33,000	21
A-36	2,531	36,000	20
A-455	2,601	37,000	15
AH-55	3,867	55,000	20
AH-SR	3,867	55,000	20
S-42	4,200	59,600	8 (mín.)

Los cinco primeros tipos son aceros estructurales y el último, de refuerzo para concreto

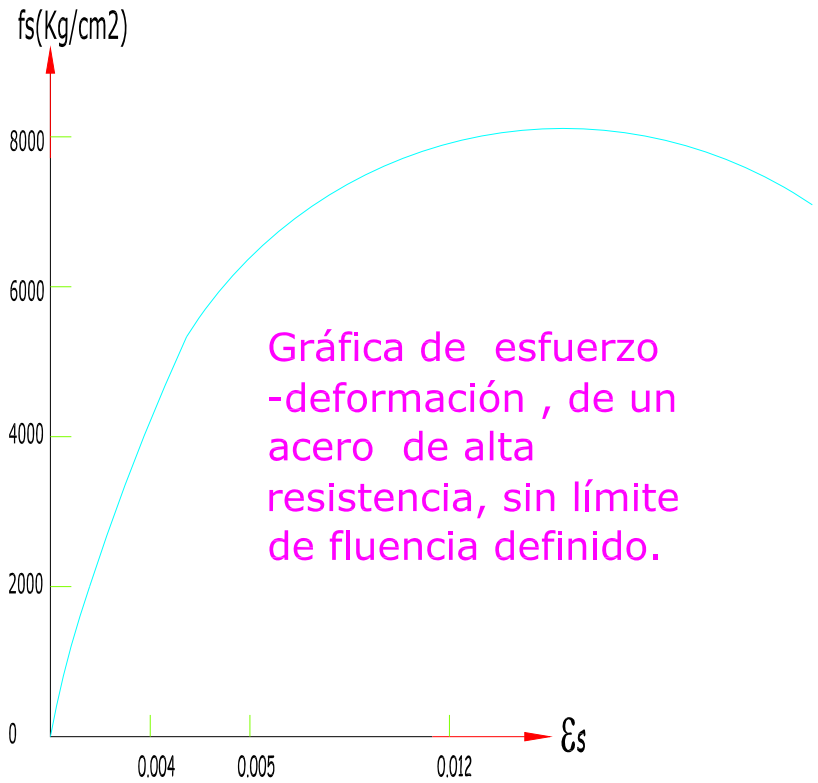
Módulo de Poisson.

La relación entre la deformación unitaria transversal (εtransv.) y la longitudinal (εlong.) designada por μ o υ varía entre 0.25 y 0.33 y resulta ser una propiedad fundamental para el diseño de mecanismos y cuando el metal se expone a efectos térmicos.

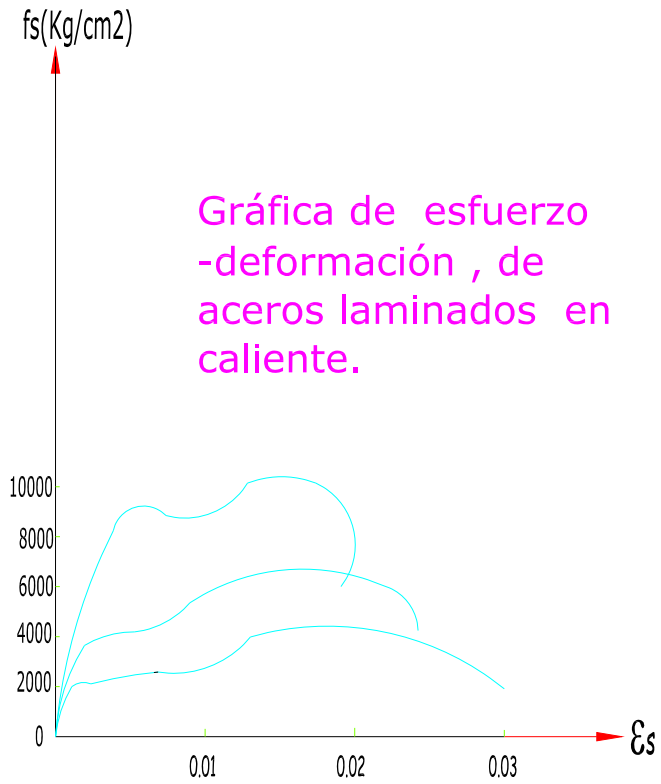
Como propiedades físicas del acero se pueden citar: la ductilidad, que se mide como un porcentaje del alargamiento en la ruptura; los valores típicos varían entre un 5% y 20%. El coeficiente de dilatación térmica que es el cambio dimensional que experimenta el material, ante la variación de la temperatura, que se sitúa en 0.00001/°C lo que hace del material poco resistente el fuego directo. Susceptibilidad a la corrosión que consiste en la reacción química degradable del metal, ante la presencia de humedad.

Aceros para refuerzo de concreto.

Las varillas se pueden fabricar o rolar ya sea en frío o en caliente, pero cono se mencionó antes, son recomendables estas últimas para reforzar concreto. En México, las trabajadas en frío alcanzan esfuerzos de fluencia de 4,000 a 6,000 Kg/cm^2. y las roladas en caliente, del orden de 2,300 a 4,200 Kg/cm^2. Las gráficas siguientes, muestran los parámetros típicos de varillas de fabricación Europea, muy similares a las de producción americana.



Gráfica de esfuerzo -deformación , de un acero de alta resistencia, sin límite de fluencia definido.



Gráfica de esfuerzo -deformación , de aceros laminados en caliente.

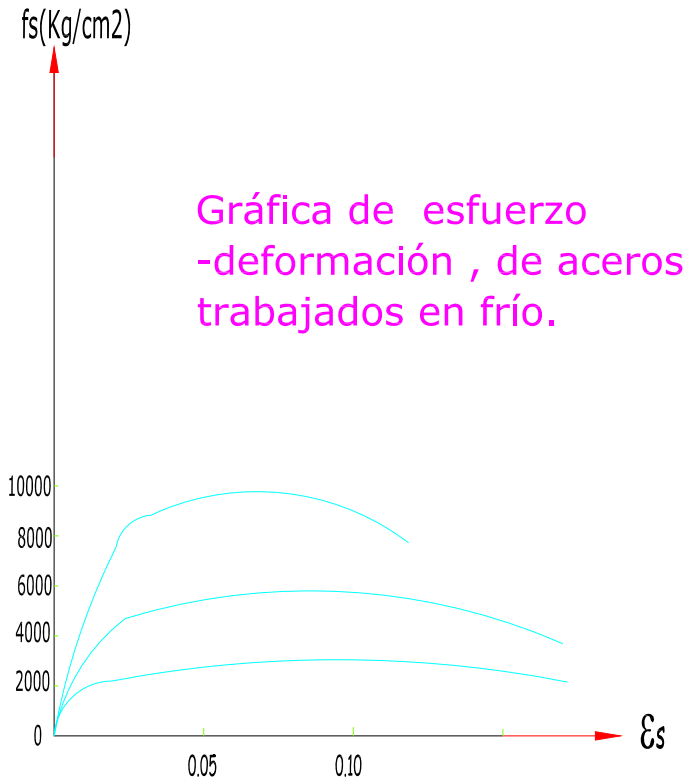


Tabla X.X.- Diámetros, pesos, áreas y perímetros de varillas para refuerzo.

Núm.	Diámetro	Peso	Área	Perímetro

	in	mm	Kg/m	cm^2	cm
2	1/4	6.4	0.248	0.32	1.99
2.5	5/16	7.9	0.338	0.49	2.48
3	3/8	9.5	0.559	0.71	2.98
4	½	12.7	0.993	1.27	3.99
5	5/8	15.9	1.552	1.98	5.00
6	¾	19.0	2.235	2.85	6.00
7	7/8	22.2	3.042	3.88	6.97
8	1	25.4	3.973	5.07	7.98
9	1-1/8	28.6	5.028	6.41	8.99
10	1-1/4	31.8	6.207	7.92	9.99
11	1-3/8	34.9	7.511	9.58	10.96
12	1-1/2	38.1	8.938	11.40	11.97

Mallas electrosoldadas.

En la actualidad es generalizado el uso de malla para reforzar concreto, unas veces son de alambre liso y otras corrugadas. Se fabrican de acero trabajado en frío y su límite de fluencia es del orden de 5,000kg/cm^2

Tabla X.X.- Mallas electrosoldadas

Tipo de malla	Diámetro de alambres		Área de acero cm^2/m	Peso Kg/m
	in	mm		
6x6/10-10	0.135	3.43	0.606	0.0723
6x6/8-8	0.306	4.11	0.872	0.1041
6x6/6-6	0.192	4.88	1.227	0.1468

Las primeras cifras indican la abertura de las celdas en in y las segundas el calibre de los alambres.

LA MAMPOSTERÍA:

Se conoce como mampostería, al material de construcción que resulta de la combinación de fragmentos de roca, piezas naturales o piezas artificiales, junteadas con morteros, formando un conjunto monolítico.

La mampostería tiene considerable resistencia a la compresión, pero débil a la tensión, lo mismo que el concreto simple. Las propiedades mecánicas de la mampostería son variables y más difíciles de predecir que las de otros materiales usados en la construcción de estructuras.

Rocas naturales:

Las piezas de roca natural, se emplean labradas y sin labrar. En México se distinguen tres tipos de mampostería:

De primera: con piezas labradas, para trabajos finos y aparentes.

De segunda: con piezas sin labrar, para trabajaos rústicos, aparentes o no.

De tercera: con piezas irregulares, para cimentaciones y otros trabajos ocultos.

Tabla X.X.-Propiedades mecánicas de piezas naturales

Tipo de roca	Peso volumétrico(t/ m^3)	Resistencia a la compresión(Kg/cm^2)	Resistencia a flexión (Kg/cm^2)	Módulo de elasticidad (Kg cm^2)
Areniscas	1.75-2.65	150-3200	60-120	40,00 a 200,000
Basaltos(piedra	2.30-3.00	800-5,800	200-300	100,00-300,000

braza)				
Granito	2.40-3.20	800-3,000	100-200	400,000-500,000
Mármol	2.40-2.85	300-3000	35-200	900,000

Piezas artificiales:

Existe una gran variedad de piezas artificiales y difieren por la materia prima utilizada en su fabricación, las dimensiones y los procedimientos de elaboración. Pueden ser de barro, concreto, mortero, arena con cal, tepetate y otros o una combinación de dos o más componentes con el suelo-cemento que se emplea para fabricar adobes y tabiques

Tabla X.X.- Propiedades mecánicas de piezas naturales

Tipo de roca	Peso volumétrico(t/ m^3)	Resistencia a la compresión(Kg/cm^2)	Resistencia a flexión (Kg/cm^2)	Módulo de elasticidad (Kg cm^2)
Areniscas	1.75-2.65	150-3200	60-120	40,00 a 200,000
Basaltos(piedra braza)	2.30-3.00	800-5,800	200-300	100,00-300,000
Granito	2.40-3.20	800-3,000	100-200	400,000-500,000
Mármol	2.40-2.85	300-3000	35-200	900,000

Los morteros:

Los morteros son mezclas plásticas aglomerantes, que resultan de la combinación de arena+agua+cementantes. Las pruebas de resistencia a compresión, se realizan en muestras cilíndricas de 5 cm de diámetro y 10cm de altura o en cúbicas de 5cm de lado.

Sus propiedades mecánicas son variables y dependen principalmente del tipo de cementante y de la relación agua/cementante.

Tabla X.X.- Propiedades de morteros con base al cementante usado

Cementante principal	Resistencia a compresión Kg/cm^2	Módulo de elasticidad Kg/cm^2	Peso volumétrico Kg/m^3
Cal	1 a 10	3,000	2,000
Cemento	0 a 200	10,000 a 50,000	2,100
Yeso	Menos de 10	Despreciable	300

Para fines estructurales, la relación en volumen arena/cementantes recomendable, se sitúa entre 2.5 y 3.0 y la suficiente cantidad de agua para hacerlo un material trabajable. La menor resistencia a la compresión sugerida para uso con fines estructurales es de 40 Kg/cm^2

Propiedades del conjunto pieza- mortero

Son pocos los estudios hechos sobre el comportamiento de la mampostería. Usando especímenes de 40 cm de lado como muestras, se han obtenido resistencias a la compresión de 200 Kg/cm^2 en sillería y de 120 Kg/cm^2 en mampostería ordinaria. Esta resistencia es sensible a la calidad del mortero, tamaño de la pieza y espesores de las ajuntas. En cuanto a la resistencia al esfuerzo cortante se puede decir que la mampostería, también es significativamente sensible y en general se presentan dos tipos de falla en forma de gritas diagonales: por cortante cuando dicha grieta corre a través de las juntas de mortero y por tensión diagonal, cuando el desperfecto rompe tanto a las piezas como al mortero. La mayoría de los problemas son porque no se cuida su diseño en las estructuras.

Módulo de elasticidad

Como valores prácticos para el módulo de elasticidad, dado que sus gráficas σ vs ε no son rectas, se consideran los siguientes con base en la resistencia a la compresión (f*m):

E= 450 f*m para piezas de barro y

E= 600 f*m para piezas de concreto

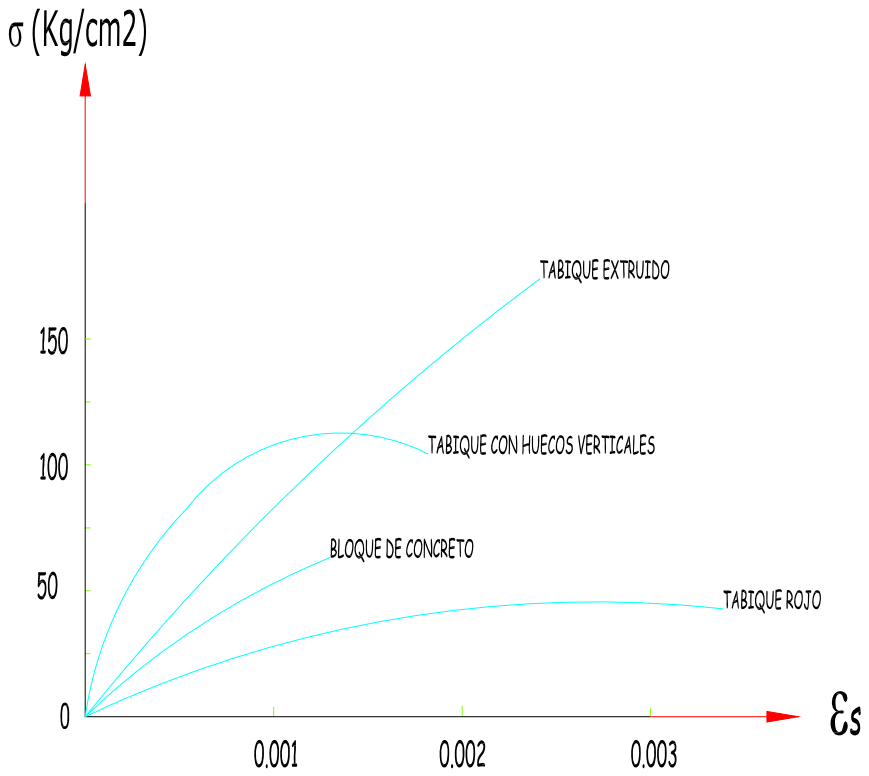
Tabla X.X.- Resistencia a la compresión de mampostería de rocas naturales

Tipo de mampostería	f*m (Kg/ cm2)

Mampostería junteada con mortero de resistencia a compresión, no menor a 50 Kg/ cm2	20
Mampostería junteada con mortero de resistencia a compresión, menor a 50 Kg/ cm2	15

Tabla X.X.- Resistencia a la compresión de mampostería de piezas artificiales (f*m en Kg/ cm2)

Tipos de piezas	Junteadas con Mortero tipo I	Junteadas con mortero tipo II	Junteadas con mortero tipo III
Tabique de barro recocido	15	15	15
Bloque de concreto	25	20	20
Tabicón de concreto	20	15	15
Tabique extruido	40	40	30



Curvas típicas de esfuerzo -deformación para mamposterías con piezas artificiales MORTERO 1-0-3

LA MADERA:

La madera es un material orgánico para construir estructuras, compuesto de celulosa, moléculas varias y lignina. Esta composición, explica su naturaleza heterogénea y anisotrópica.

Propiedades mecánicas.

Las relaciones σ vs ε del material son variables y dependen de la especie del árbol, forma de ensaye, tipo de solicitación, características de crecimiento y de otros factores.

Tensión paralela a la fibra: es la más alta de las resistencias del material, que contrasta con la tensión perpendicular, que es 40 vece menor. La madera de pinos mexicanos alcanza resistencias del orden de los 800 Kg/cm^2.

Compresión paralela a las fibras: es de 3 a 10 veces menor que la perpendicular a ellas. Los pinos mexicanos presentan valores cercanos a 150 Kg/cm^2.

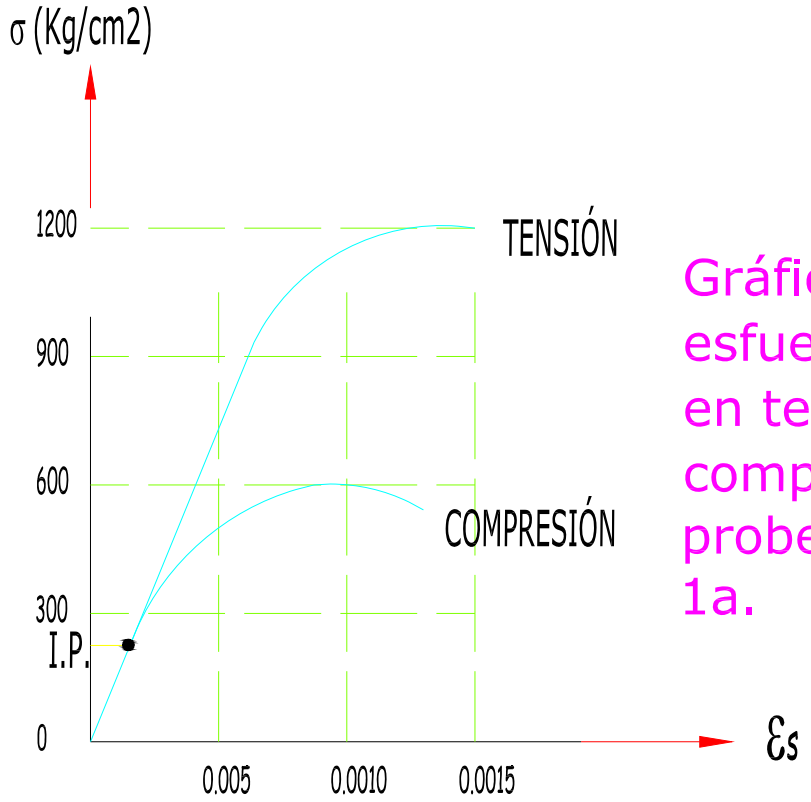
Módulo de elasticidad: varía en un rango considerable, pero se puede situar entre 80,000 Kg/cm^2 y 120,000 Kg/cm^2.

Factores que afectan su resistencia.

Densidad: influye fuertemente en la resistencia, entra mayor sea es mejor el comportamiento del material.

Contenido de humedad: se expresa como un porcentaje de una muestra secada al horno. El agua circundadote entre las fibras, se pierde por evaporación al cortar el árbol. Cuando sucede, sólo queda el líquido interno en dichas fibras, es entonces cuando se presenta el "punto se saturación" que es entre el 25% y el 30% del contenido de humedad. Para humedades superiores a los citados, la resistencia permanece constante; al reducirse, la resistencia aumenta.

Duración de las cargas: las solicitaciones de larga duración producen deformaciones plásticas o permanentes en los elementos estructurales.



Gráficas esfuerzo-deformación, en tensión y compresión en probetas de madera de 1a.

Tabla X.X.- Propiedades mecánicas de algunos tipos de madera

Especie	Tensión paralela a las fibras Kg/cm2	Compresión paralela a las fibras Kg/cm2	Compresión perpendicular a las fibras Kg/cm2	Módulo de elsticidad Kg/cm2
Pino	65	66	18	85,000
Encino	75	70	20	90,000
Zapotillo	110	100	25	110,000

2.2.- Equipos de prueba e interpretación de gráficos de esfuerzo contra deformación.

Introducción:

En este tema, se describen los equipos existentes en el laboratorio para ensayar materiales, destacando el marco universal de carga y la naturaleza de las pruebas que permite realizar a los materiales de mayor empleo en la construcción de estructuras. Se analizan las gráficas que el mismo equipo genera, de donde se deducen los resultados más importantes desde el punto de vista ingenieril. Es destacable la distinción de la zona elástica, de la plástica de los materiales.

Objetivo(s):

Construir las gráficas esfuerzo vs deformación de los materiales sometidos a prueba en el laboratorio, de donde se calculan el módulo de elasticidad, los esfuerzos críticos y se distinguen las zonas elástica y plástica.

Desarrollo:

Pruebas de laboratorio y sus resultados.

Sea el caso de una barra de longitud L y área de sección transversal A, que se somete a una fuerza axial de tensión en la máquina universal de carga ubicada en el laboratorio. Observe las figuras siguientes:

Fig. X.X.- Marco de carga universal, Laboratorio de resistencia de Materiales, FES – Acatlán - UNAM

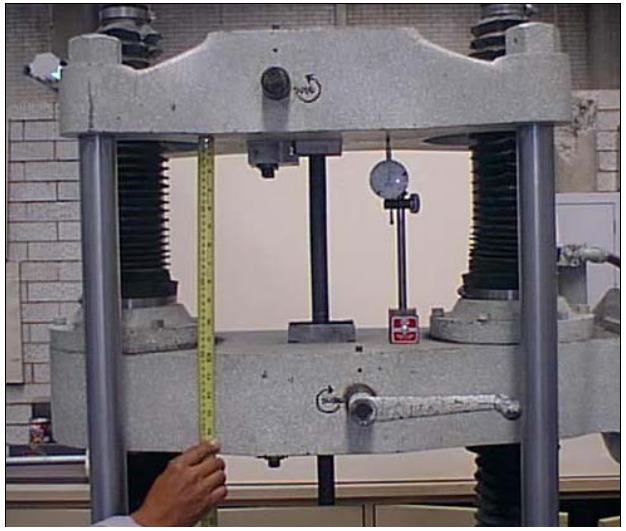


Fig. X.X.- Prueba de tensión en una barra de acero de refuerzo.

Por efecto del experimento, la barra se alargará conforme se incremente la carga, hasta romperse. Con los registros, se puede elaborar la gráfica P vs δ, no obstante que este diagrama contiene información útil para el estudio de la barra, no puede utilizarse directamente para predecir la deformación de otra pieza del mismo material, pero de dimensiones diferentes. Para superar este inconveniente se adopta el concepto de deformación unitaria designada por ε, como el alargamiento por unidad de longitud de una barra sometida a carga axial, es decir: $\varepsilon = \delta/L$.

Construyendo la gráfica $\sigma = P/A$ vs $\varepsilon = \delta/L$ con los registros de la prueba, en lugar de la P vs δ, las características que se descubren, ya no dependen de las dimensiones de la probeta utilizada. A esta curva se le conoce como diagrama de esfuerzo vs deformación unitaria. Para ensayos estandarizados a tensión, no se usa cualquier barra, sino probetas especiales como las que se muestran:

Fig. X.X.- Probetas de acero estandarizadas para la prueba de tensión.

A dichas probetas se le ponen dos marcas distanciadas L una de la otra. El incremento del distanciamiento se mide con un sensor y se asocia para cada valor creciente de la carga axial. El aumento de distancia se divide entre L para tener ε en tanto que los registros de P, se dividen entre A para obtener σ. Aun cuando las gráficas que resultan pueden variar una de otra por la temperatura de la muestra o por la velocidad de aplicación de las cargas, se pueden distinguir dos grandes grupos de materiales: dúctiles y frágiles.

Los primeros, a los que corresponden el acero y otras aleaciones metálicas, fluyen a temperaturas normales. Al efectuarles la prueba de tensión a estos materiales, primeramente aparece una línea recta con una línea pronunciada. Después se alcanza un valor crítico de esfuerzo, en el que la probeta

experimenta deformaciones importantes a cambio de incrementos moderados de cargas. A este punto se le denomina esfuerzo de fluencia. Inmediatamente, prosigue el alargamiento, hasta que se reduce el diámetro de la probeta en una cierta sección, fenómeno conocido como estricción, que ocasiona la respuesta cada vez menor de la probeta para finalmente romperse. De la gráfica completa de la prueba se distinguen datos importantes como son:

Módulo de elasticidad: pendiente de la porción recta de la gráfica, se designa por $E= \sigma/\varepsilon$

Límite de proporcionalidad: esfuerzo hasta donde se observa correspondencia lineal entre esfuerzos y deformaciones unitarias.

Límite elástico: esfuerzo hasta donde el material recupera sus dimensiones, al retirarle la fuerza

Esfuerzo de fluencia: nivel de esfuerzos en que el material fluye (deformación fuerte, incrementos de carga, débiles).

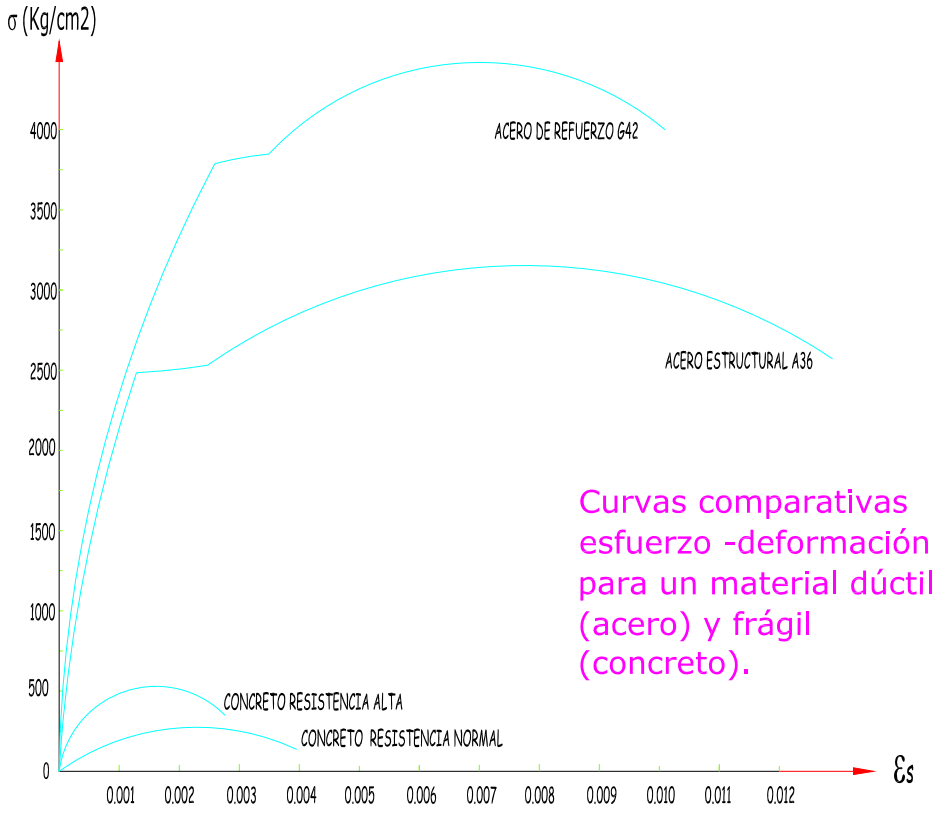
Esfuerzo máximo: mayor respuesta del material al estiramiento.

Esfuerzo a la ruptura: nivel del esfuerzo en el momento en que la probeta se rompe por estricción.

Zona elástica: intervalo del ensayo, donde el material puede recuperar sus dimensiones al retirarle a la carga.

Zona inelástica: región de la gráfica donde el material presenta deformaciones permanentes.

En cuanto a los materiales frágiles, se tiene que sus correspondientes gráficas σ vs ε, son bien diferentes a las mencionadas arriba, toda vez que al iniciar la estricción sobreviene la ruptura. No se distinguen los valores característicos de esfuerzos citados para los materiales dúctiles



Curvas comparativas esfuerzo -deformación para un material dúctil (acero) y frágil (concreto).

La mayoría de las estructuras se diseñan para que experimenten deformaciones aceptables, que involucren sólo la parte lineal de la gráfica σ vs ε. El límite de proporcionalidad marca el valor más alto de esfuerzo para que tenga significado la aplicación del módulo de elasticidad, esto es para utilizar la Ley de Hooke, que muestra la linealidad entre σ y ε, mediante $\sigma=E\,\varepsilon$, siendo E la constante de proporcionalidad.

Zonas elástica y plástica

El límite elástico establece la frontera entre el comportamiento elástico y plástico de los materiales, si ε no vuelve a cero al retirar la carga, se habrán producido deformaciones permanentes o plásticas. Para la mayoría de los materiales, estas deformaciones no sólo dependen de las cargas, sino del tiempo transcurrido antes de retirar dicha carga. La parte de la deformación plástica que depende de las cargas o esfuerzos, se denomina deslizamiento y la que depende del tiempo se llana flujo plástico o creep. Para fines prácticos, los límites elástico, proporcionalidad y de fluencia, se consideran básicamente iguales.

Ejemplo 2.2-1.

Los datos de la tabla anexa se obtuvieron en una prueba de tensión aplicada a un acero de alta resistencia. La probeta de prueba tenía un diámetro de 0.505 pulg. y una longitud calibrada de 2.00 pulg. El alargamiento total entre las marcas de calibración en la fractura fue de 0.12 pulg. y el diámetro mínimo fue de 0.42 pulg.

Trace la curva convencional esfuerzo – deformación unitaria para el acero y determine el límite de proporcionalidad, el módulo de elasticidad, el esfuerzo último.

P (lb)	δ (pulg)
0	0
1000	0.0002
2000	0.0006
6000	0.0019
10000	0.0033
12000	0.0039
12900	0.0043
13400	0.0047
13600	0.0054
13800	0.0063
14000	0.009
14400	0.0102
15200	0.013
16800	0.023
18400	0.0336
20000	0.0507
22400	0.1108
22600	0.12

Solución:
De los datos de la tabla, se obtienen los valores de esfuerzo y deformación unitaria para graficar la curva σ-ε mostrada más adelante:

Observando la gráfica, podemos ver que la curva esfuerzo - deformación unitaria es proporcional hasta el esfuerzo de 66900lb/pulg^2, por lo que podemos decir entonces:

Límite de proporcionalidad = 66900 lb/pulg^2 Solución

De acuerdo a la ley de Hooke, tenemos que el módulo de elasticidad es:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{66900.77 lb/pu\lg^2}{0.0024} = 28468417.7 lb/pu\lg^2$$

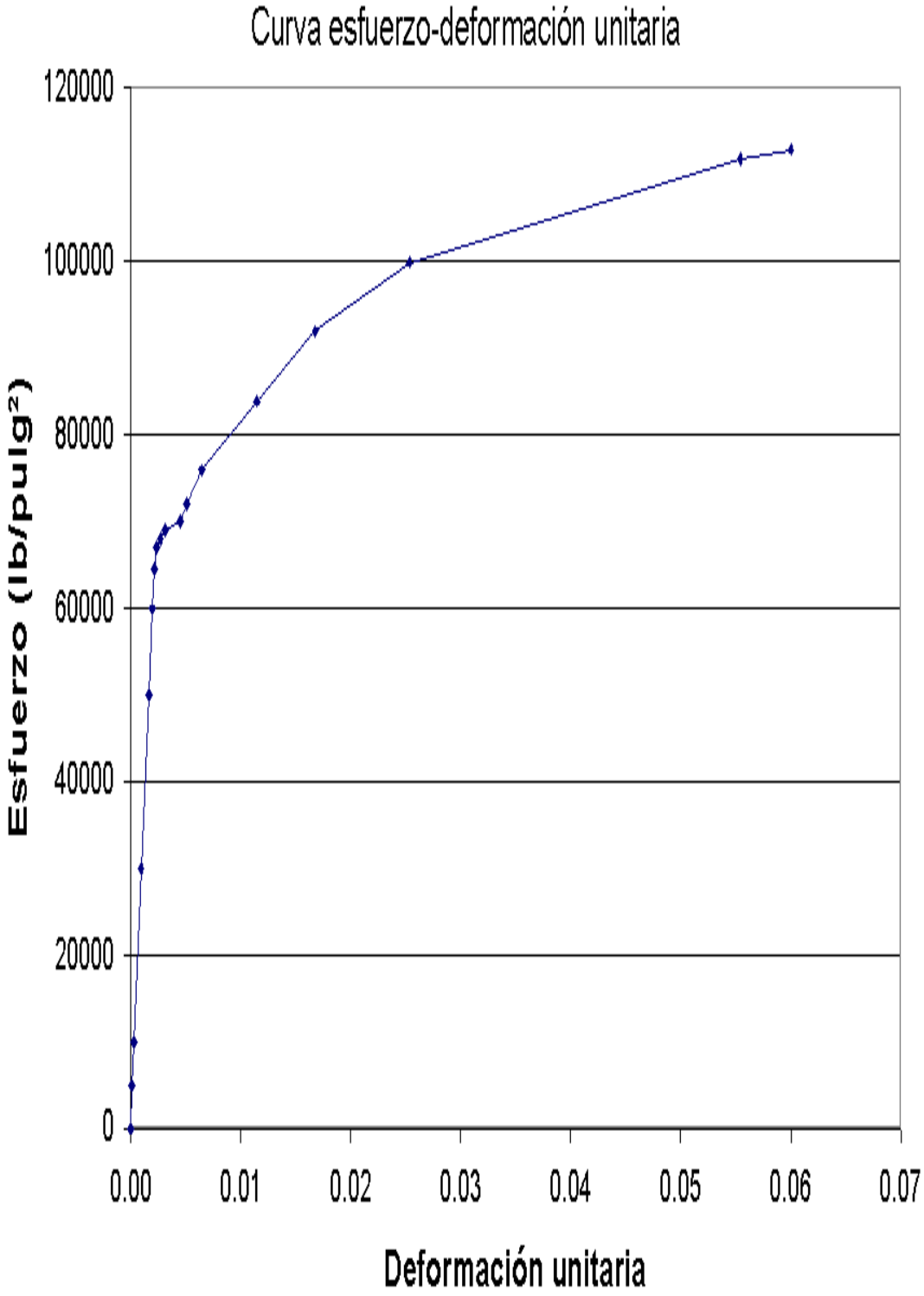
E=28.5Mpa Solución

El esfuerzo último podemos ver que corresponde, al mismo tiempo, al esfuerzo de fractura, por lo tanto:

σúltimo=112832.65 lb/pulg^2 Solución

DATOS		
$L_{patrón}$ =	2	pulg
$D_{inicial}$ =	0.505	pulg
L_{final} =	2.12	Pulg
D_{final} =	0.75	pulg

P (lb)	□ (pulg)	Ainicial ($pulg^2$)	□ ($lb/pulg^2$)	□
0	0	0.200	0.00	0.0000
1000	0.0002	0.200	4992.60	0.0001
2000	0.0006	0.200	9985.19	0.0003
6000	0.0019	0.200	29955.57	0.0010
10000	0.0033	0.200	49925.95	0.0017
12000	0.0039	0.200	59911.14	0.0020
12900	0.0043	0.200	64404.48	0.0022
13400	0.0047	0.200	66900.77	0.0024
13600	0.0054	0.200	67899.29	0.0027
13800	0.0063	0.200	68897.81	0.0032
14000	0.009	0.200	69896.33	0.0045
14400	0.0102	0.200	71893.37	0.0051
15200	0.013	0.200	75887.45	0.0065
16800	0.023	0.200	83875.60	0.0115
18400	0.0336	0.200	91863.75	0.0168
20000	0.0507	0.200	99851.90	0.0254
22400	0.1108	0.200	111834.13	0.0554
22600	0.12	0.200	112832.65	0.0600


Curva esfuerzo-deformación unitaria
120000
100000
80000
60000
40000
20000
0
Esfuerzo (lb/pulg²)
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
Deformación unitaria

2.3.- Gráficas reales y gráficas convencionales.

Introducción:

Interpretar las gráficas P vs δ o σ vs ε, es de relevancia en los cursos de Resistencia de Materiales, porque proporcionan información relacionada con las principales propiedades mecánicas de las sustancias empleadas para construir y sustentar las estructuras que los Ingenieros Civiles edifican para cumplir diversos fines. Para propósitos técnicos, se ha adoptado la utilización de *gráficas convencionales* que son aquellas que se construyen considerando en todo momento, el área original de la sección transversal de las muestras sobre las que actúan las cargas. Situación que no es estrictamente exacta por que es inevitable la variación de esta magnitud (incremento o decremento), conforme procede el ensayo. Las *gráficas reales* que se trazan tomando en cuenta dicha variación, carecen de utilidad práctica.

Objetivo(s):

Construir y analizar, las gráficas convencionales P vs δ o σ vs ε obtener de ellas, el comportamiento de los materiales sujetos a cargas de diversa naturaleza.

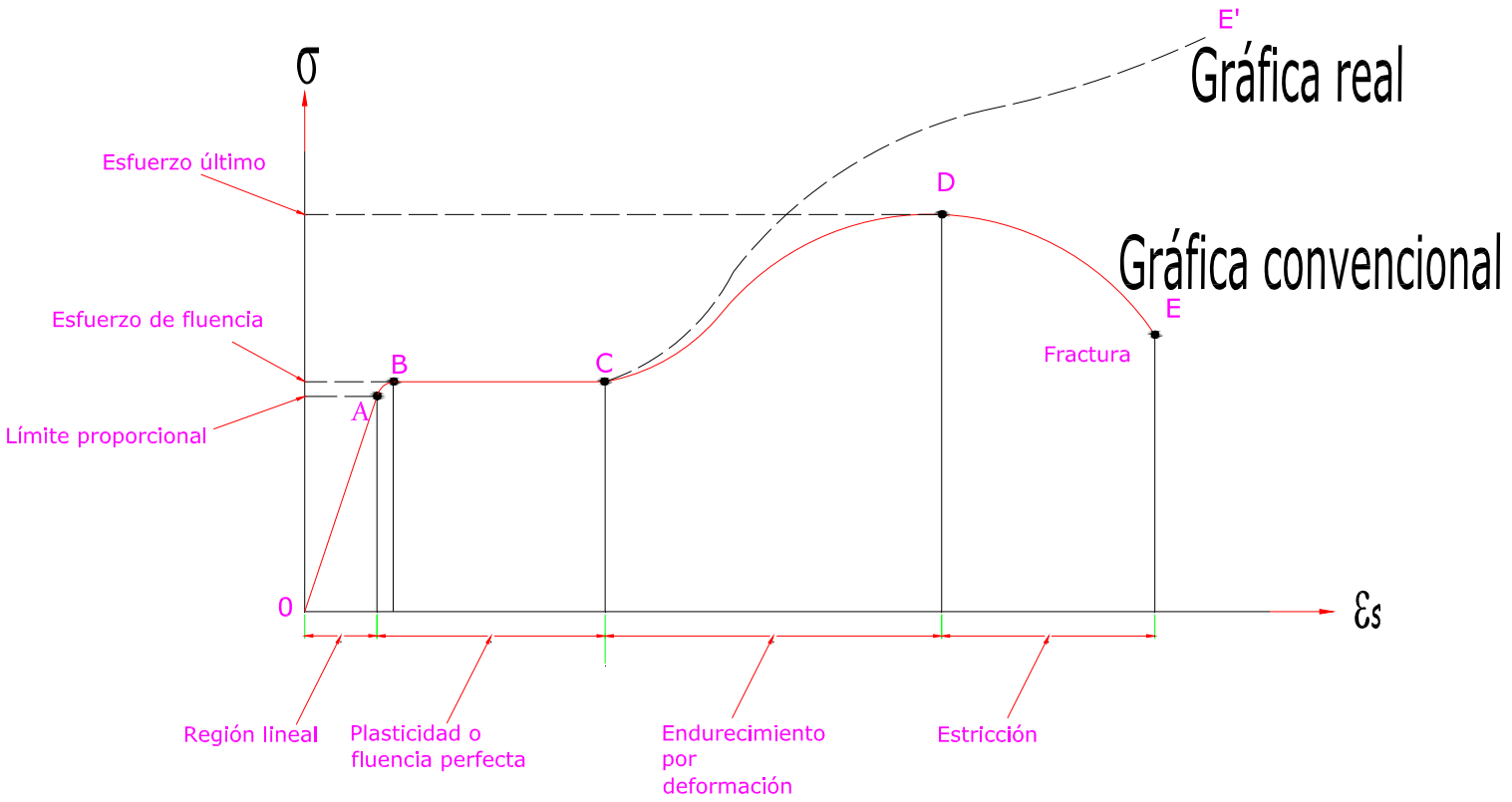
Desarrollo:

El esfuerzo utilizado para construir las gráficas mencionadas, se obtiene dividiendo la fuerza P entre el área de la sección transversal, antes de que la deformación se iniciara. Como el área se reduce al crecer P, el esfuerzo graficado en los diagramas no representa al real en la probeta. La diferencia entre el esfuerzo "ingenieril" $\sigma=P/A_o$ y el verdadero $\sigma=P/A$ obtenido al dividir a P entre el área reducida de la probeta

deformada es considerable en materiales dúctiles, al rebasar el esfuerzo de fluencia. De esta manera, cuando el primero de los esfuerzos decrece por adelgazamiento de la probeta, por ser directamente proporcional a P, el segundo, que es también directamente proporcional a P, pero inversamente proporcional área A, se mantiene creciendo hasta la ruptura.

Algunos científicos, usan una definición diferente para $\varepsilon = \delta/L_o$ (siendo L_o la longitud inicial entre las marcas en la probeta) emplean los valores sucesivos de L que van registrando. Dividiendo cada incremento ΔL de la distancia entre las marcas por el valor correspondiente de L, obtienen la deformación elemental $\Delta \varepsilon = \Delta L/L$. Sumando los valores sucesivos de $\Delta \varepsilon$, definen el valor verdadero de ε.

Los diagramas trazados utilizando esfuerzos y deformaciones unitarias verdaderas, reflejan el comportamiento de los materiales de manera más precisa. No hay disminución del esfuerzo verdadero durante la estricción. Este razonamiento también se puede extender a pruebas de compresión.



Sin embargo, los ingenieros, cuya responsabilidad es determinar si una carga P producirá un esfuerzo admisible y una deformación aceptable en cierto elemento estructural o mecanismo, prefieren utilizar los diagramas elaborados a partir de $\sigma=P/A_o$ y $\varepsilon= \delta/L_o$, ya que estas expresiones contienen datos disponibles y considerados antes de que se inicie la prueba, además de que dichas expresiones les han arrojado valores del lado de la seguridad al construir las estructuras.

2.4.- Ductilidad, fragilidad, homogeneidad, isotropía, anisotropía.

Introducción:

Es útil analizar las propiedades de los materiales antes mencionados, toda vez que de ellas depende el máximo aprovechamiento que se pueda lograr, ya sea de elementos estructurales hechos de un solo material o de varios, trabajando de manera combinada.

Son ejemplos de materiales dúctiles, los metales, en especial los aceros tanto estructurales como para el refuerzo del concreto, de bajo contenido de carbono, el caucho y algunos plásticos, que adicionalmente presentan características de homogeneidad e isotropía.

Como ejemplos de materiales frágiles se tienen el concreto simple, las rocas naturales y artificiales, los morteros, que además son heterogéneos y anisotrópicos.

Objetivo(s):

Analizar las propiedades de los materiales que se citan en el título del tema, para predecir su resistencia al ser utilizados para soportar cargas.

Desarrollo:

Ductilidad.

La ductilidad se puede entender como la propiedad física de algunos materiales consistente en aceptar deformaciones "significativas" antes de fallar. El caso más representativo de un material dúctil es el acero ya sea estructural o de refuerzo. Así en un ensayo de laboratorio, una probeta de este material pueda alcanzar alargamientos después de la fluencia y hasta la ruptura equivalentes a 200 veces los que acepta antes de fluir.

Una medida normal de la ductilidad de un material es la elongación o alargamiento porcentual, definido como:

$$(L_f - L_o)/L_o)*100$$

siendo L_0 y L_f las longitudes inicial y final a la ruptura de la probeta, respectivamente. Para aceros como el A36, el alargamiento mínimo recomendable es del 20%. La ductilidad es una propiedad deseable en los aceros a utilizar en la construcción de estructuras en zonas sísmicas. Antes de la fluencia, resistencia a tensión de estos materiales es similar a la de compresión.

Fragilidad.

La fragilidad es una propiedad opuesta a la anterior. Los materiales frágiles como la fundición, el vidrio, las rocas, el concreto simple y otros, se caracterizan porque en las pruebas, la ruptura ocurre antes de que se presente un rango significativo de alargamiento. De manera que en estos materiales, no hay diferencia apreciable entre su resistencia última y la de ruptura. Tampoco presentan estricción y se observa que la falla ocurre en un plano perpendicular a la dirección a la carga, lo que significa que los esfuerzos normales son los principales causantes de la ruptura en los materiales quebradizos.

Para la mayor parte de los materiales frágiles, se encuentra que la resistencia última a compresión, es mucho mayor que la de tensión. Esto se debe a fisuras microscópicas o cavidades que los tienden a debilitar a la tensión, sin afectar gravemente su comportamiento a la compresión.

Homogeneidad.

La homogeneidad es una particularidad de los materiales consistente en que poseen las mismas propiedades mecánicas, como E y μ por ejemplo, en cualquier punto de su masa. Esto es ventajoso porque se puede confiar en que el material ofrecerá la misma respuesta, no importando la porción, sector, posición o forma en que se utilice. El acero es un buen ejemplo de material homogéneo, al menos a nivel macroscópico.

Heterogeneidad.

En contraposición al concepto anterior, la heterogeneidad de un material, consiste en la variedad de respuestas que puede ofrecer al utilizarlo, es decir que posee valores cambiantes de E y μ en función a la composición y consistencia diversa de su masa. Por tal razón presentan respuestas diferentes a las solicitaciones y en consecuencia hay que emplearlos con cuidado. Ejemplo de este material es el concreto, que en un punto de su masa tiene fragmentos de roca, en otro, pasta cemento-arena, vacíos, fisuras y burbujas de aire, arena sola, aditivos, sólo por mencionar algunos. Y si a esto se le agrega la edad, el proporcionamiento y los cuidados, la respuesta es impredecible.

Isotropía.

La isotropía es una propiedad física de los materiales que presentan un gran número de sus cristales microscópicos orientados al azar. Debido a este arreglo aleatorio, las respuestas a las solicitaciones son prácticamente las mismas, en cualquier dirección y punto en que éstas le sean aplicadas, constituyendo un comportamiento ventajoso para su empleo con fines de ingeniería. El acero, vidrio son ejemplos de estos materiales.

Anisotropía.

La anisotropía es la característica física de algunos materiales como los cristales simples, que poseen diferentes módulos elásticos en distintas direcciones, en relación con sus planos cristalográficos, en virtud de que todos los cristales mencionados, están orientados hacia una dirección determinada. Un material que presenta propiedades parecidas a éstas, es la madera, cuyas fibras siguen una dirección definida y por lo tanto, su respuesta depende de la orientación que guarden con la dirección de aplicación de las cargas.

En los cursos normales de Resistencia de Materiales, se asume la total homogeneidad y la completa isotropía de los materiales.

Unidad 3. FLEXIÓN Y DIMENSIONAMIENTO DE VIGAS.

Objetivo: Analizará el comportamiento de vigas isostáticas sujetas a flexión, aplicando la teoría de la flexión al dimensionamiento preliminar de vigas.

Temas:

3.1.- Esfuerzos normales por flexión en vigas de uno o más materiales.

3.2.- Esfuerzos cortantes por flexión.

3.3.- Dimensionamiento por flexión y cortante en vigas de un solo material.

3.1.- Esfuerzos normales por flexión en vigas de uno o más materiales.

Introducción:

En este tema se presenta la deducción de la ecuación que relaciona los esfuerzos normales que se producen en una viga bajo la acción de momentos flexionantes, conocida como ecuación de la "Escuadría". Dicho estudio describe el comportamiento tanto elástico como plástico de los materiales. Así mismo, se analiza la correlación que existe entre el momento flexionante y la curvatura que se produce.

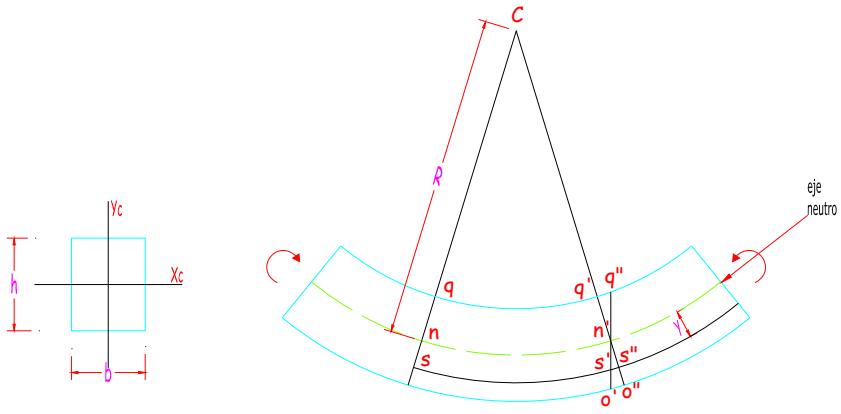
Objetivo(s):

Analizar el estado de esfuerzos normales producidos por la acción de momentos flexionantes.

Desarrollo:

FLEXIÓN ELÁSTICA:

Obsérvese la siguiente figura en la que se presenta una porción de viga sometida a la acción de un momento flexionante M:



Se observa que:

- Las fibras qq´ se acortan
- Las fibras oo´ se alargan
- Las fibras nn´ no sufrirán cambio
- La fibra ss´ sufrirá un alargamiento s´-s´´

El eje neutro se curvara con un radio de curvatura R.

Obsérvese los triángulos semejantes nCn´ y s´n´s´´ de los cuales se obtiene:

$$\frac{\overline{nC}}{\overline{nn'}} = \frac{\overline{n's''}}{\overline{s's''}}$$

O bien:

$$\frac{\overline{s's''}}{\overline{nn'}} - \frac{\overline{n''s'}}{\overline{nc}}$$

Sumados los esfuerzos de tensión (T) y de compresión (C) en toda el área se producirán dos resultantes, una de tensión y otra de compresión. Para cada área y cambio de sección aparece el par generado por C y T al que se le conoce como "momento resistente" de la sección, por lo que para que exista equilibrio se deberá cumplir con:

Momento resistente ≥ Momento flexionante

Para la mejor comprensión de los conceptos relativos a la flexión elástica, a continuación se presenta un resumen de conceptos antecedentes relacionados a la misma, como son los del momento estático y momento de inercia.

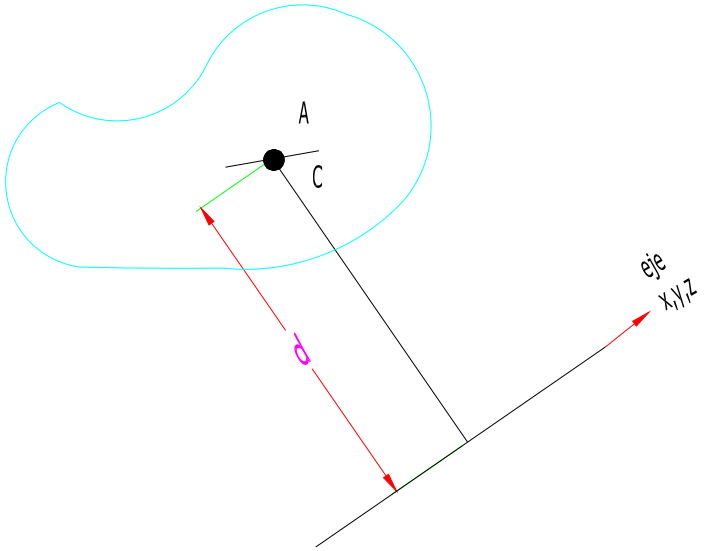
ANTECEDENTES CONCEPTUALES:

- *MOMENTO ESTÁTICO O DE 1ER. GRADO:*

Es el producto del área total de una figura plana por la distancia que existe entre su centroide y un eje dado.

$$M = A * d$$

Centroide: punto donde se concentra el área de la figura en cuestión



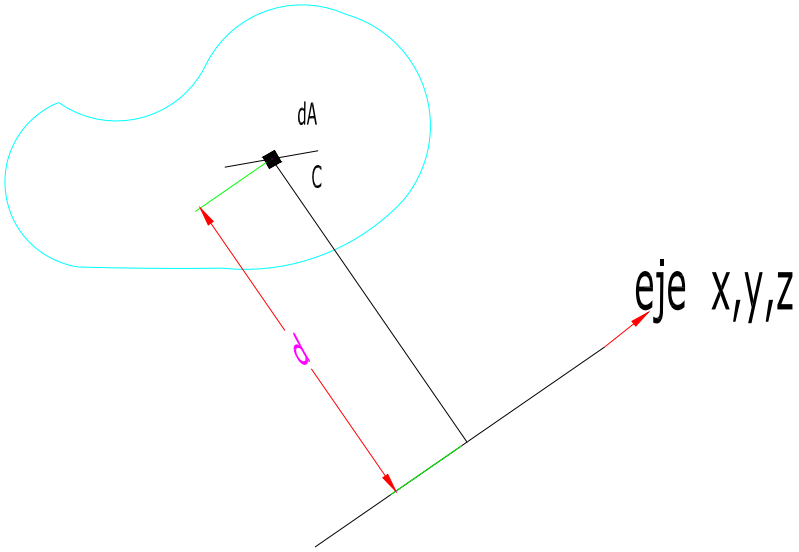
- *MOMENTO DE INERCIA O DE 2o GRADO:*

Es la suma de momentos de inercia elementales dI (producto del área elemental dA por el cuadrado de la distancia a un eje referencial).

$$dI = y^2 dA$$

$$I_{x,y,z} = \int^{A} dI_{x,y,z}$$

$$I_{x,y,z} = \int^{A} y^2 dA \text{ (Fórmula general)}$$



Para efectos prácticos en la determinación de centroides y momentos de inercia, resulta útil hacer uso de las tablas que aparecen en los diferentes libros de Estática o Resistencia de materiales, donde aparecen las propiedades geométricas de las áreas, figuras o secciones más comunes.

- *TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS:*

"El momento de inercia de una sección con respecto a un eje cualquiera del plano, es igual a la suma del momento de inercia centroidal de esa sección mas el área por su distancia entre los ejes al cuadrado".

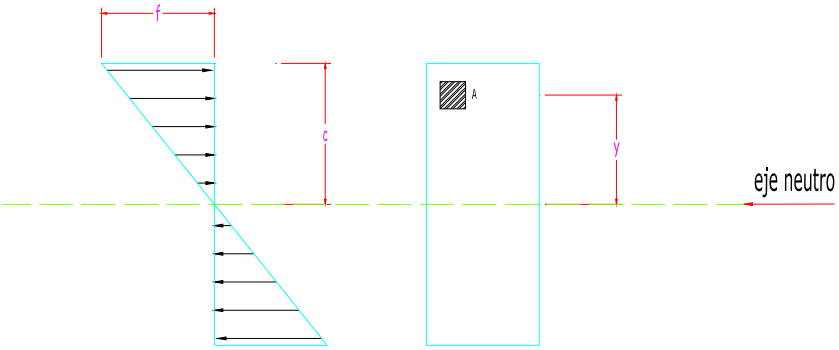
Algebraicamente tenemos:

$$I_x = I_{xc} + Ad_y^2$$

O bien:

$$I_y = I_{yc} + Ad_x^2$$

FÓRMULA DE LA ESCUADRÍA:



Sea “c” la distancia a la fibra más alejada del plano neutro y sea “f” el esfuerzo sobre la fibra a una distancia “c”.

Si “f” no excede el límite elástico del material, los esfuerzos son directamente proporcionales a sus distancias con respecto al eje neutro.

Es entonces que, para obtener el esfuerzo sobre la fibra unitaria con respecto al plano o eje neutro tenemos:

$$\frac{f}{c}$$

Sea “A” una pequeña área localizada a una distancia “y” del eje neutro, entonces con respecto a lo anterior el esfuerzo con respecto a la fibra a una distancia “y” será:

$$\frac{f}{c} * y$$

Más específicamente para la pequeña área tenemos que la fuerza será igual a:

$$\frac{f}{c} * y * A$$

El momento de esta fuerza resultante será (sobre la fibra “A”):

$$\frac{f}{c} * A * y * y = \frac{f}{c} * A * y^2 \; ; \quad = \text{momento resistente de la pequeña área.}$$

El momento resistente total será:

$$M = \frac{f}{c} * \sum A * y^2$$

$$pero \int_A y^2 dA = \sum A * y^2 = I_x$$

$$entonces \quad M = \frac{f}{c} I_x, \qquad \frac{M}{f} = \frac{I_x}{c}$$

Pero:

$$\overline{mn'} = \overline{ss'}$$

Por lo tanto la deformación en el mismo plano queda:

$$\frac{\overline{s's''}}{\overline{mn'}} = \frac{\overline{s's''}}{\overline{ss'}}$$

Que es una deformación unitaria ocurrida en el eje z.

De la figura observamos que $\overline{s'n'}$ es igual a “y” y que $\overline{nc} = R$

Por lo tanto:

$$\frac{\overline{s'n'}}{\overline{nc}} = \frac{y}{R}$$

Tenemos entonces:

$$\frac{\overline{s's''}}{mn'} = \frac{\overline{s's''}}{\overline{s's'}} = \frac{\overline{s'n'}}{nc} = \frac{y}{R} = \epsilon$$

Sabemos que:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

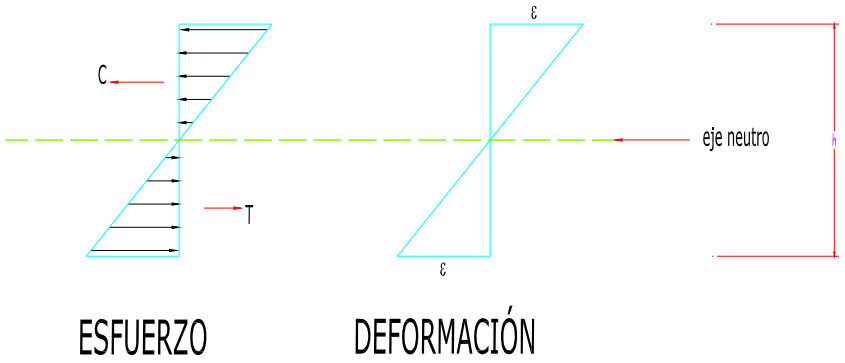
Por lo tanto:

$$E = \frac{\sigma R}{y}$$

Lo que nos queda como:

$$\frac{E}{R} = \frac{\sigma}{y}$$

Esta ecuación nos muestra que los esfuerzos y las deformaciones en las fibras longitudinales son directamente proporcionales a su distancia al eje neutro, e inversamente proporcionales al radio de curvatura. Observe la siguiente figura:



Tenemos que:

$$M = \frac{E}{R}\int y^2 dA$$

Y dado que $I = \int^A y^2 dA$, es el momento de inercia de I del área con respecto a un eje (eje neutro en este caso, y pasa por el centro de gravedad), tenemos:

$$M = \frac{EI}{R}$$

ó bien:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

Dicha relación indica que la curvatura es directamente proporcional al momento flexionante. Finalmente tenemos que:

$$\frac{E}{R} = \frac{\sigma}{y} = \frac{M}{I}$$

De donde obtenemos la ecuación que define los esfuerzos normales por flexión, mas conocida como “ecuación de la escuadría”:

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

Esta nos dice que el esfuerzo normal por flexión en cualquier punto de la sección de la viga es directamente proporcional a la distancia de ese punto al eje neutro. Si consideramos a *y* = *ymáx* = *c*, donde “c” es la mayor distancia en y respecto al eje neutro tendríamos:

$$\sigma = \frac{Mc}{I}$$

Por otro lado, si separamos el valor de $\frac{I}{c}$ de de la ecuación anterior, cociente definido por las propiedades geométricas de la sección, la ecuación tendría la forma:

$$S = \frac{I}{C} = \frac{M}{\sigma}$$

Donde “*S*”, es conocido como módulo de sección.

Dicho valor es útil en el diseño de vigas a flexión de sección constante.

DEFORMACIONES PLÁSTICAS.

FLEXIÓN EN MATERIALES ELASTOPLÁSTICOS):

Siempre y cuando no se exceda la resistencia de fluencia σ_y, será aplicable la Ley de Hooke (distribución lineal de esfuerzos).

$$\sigma_M = \frac{M_c}{I}$$

Cuando el momento flector aumenta el σ_M eventualmente alcanza el valor de σ_y. Se tiene entonces:

$$M_y = \frac{I}{C}\sigma_y$$

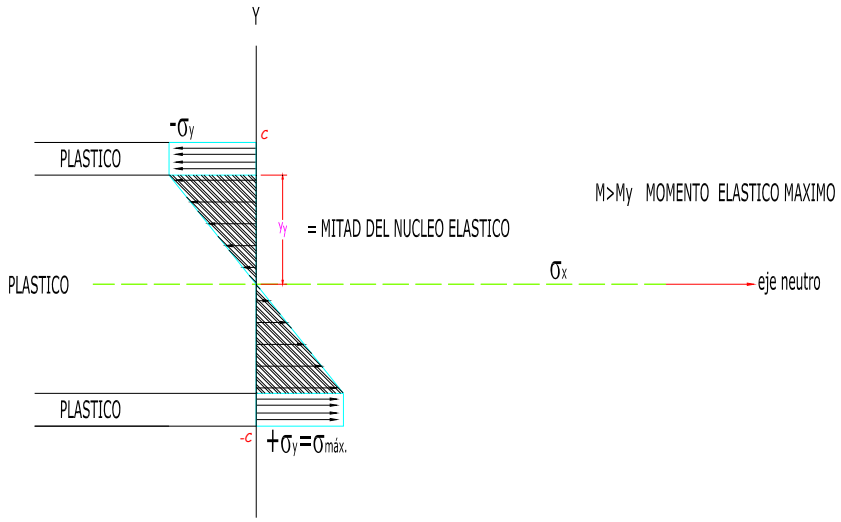
Que es el momento flector que inicia la fluencia o momento elástico máximo (Momento mayor para el cual la deformación permanece totalmente elástica). Para secciones rectangulares tendríamos:

$$M_y = \frac{I}{C} = \frac{\frac{b(2c)^3}{12}}{c} = \frac{2}{3}bc^2$$

$$M_y = \frac{2}{3} b c^2 \sigma_y$$

(1)

A medida que el momento flector aumenta se desarrollan zonas plásticas en el elemento, con el esfuerzo uniforme igual a - σ_y en la zona superior, y a + σ_y en la zona inferior.

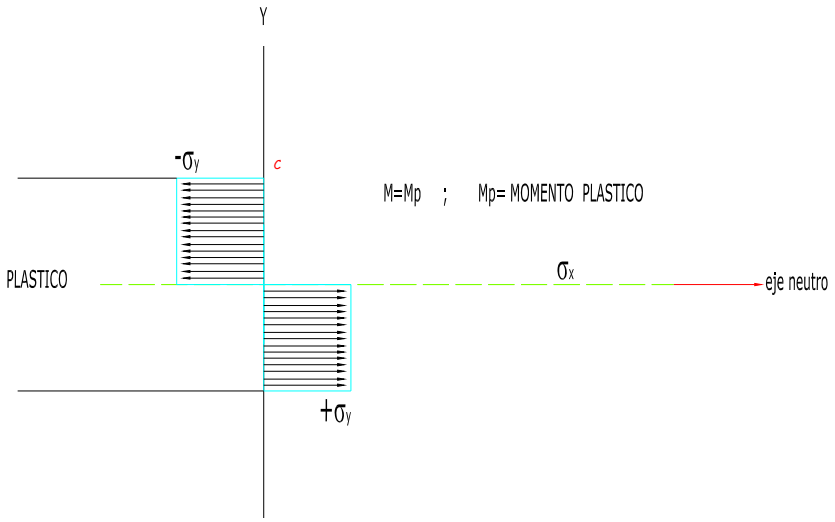


Entre las zonas plásticas subsiste un núcleo elástico en el cual el σ_x varia linealmente con y:

$$\frac{\sigma_x}{y} = -\frac{\sigma_y}{y_y} \quad ; \qquad \sigma_x = -\frac{\sigma_y * y}{y_y}$$

En donde y_y es la mitad del núcleo elástico (espesor).

Si M sigue aumentando, las zonas plásticas se expanden hasta que la deformación es totalmente plástica.



El momento flector correspondiente a un espesor $2y_y$ del núcleo elástico se obtiene:

$+\sigma_x \; para \; 0 \leq y \leq y_y$ es igual a $-\sigma_y \; para \; y_y \leq y \leq c$ entonces:

$$M = -2b \int_0^{y_y} y \left(-\frac{\sigma_y}{y_y} y\right) dy - 2b \int_{y_y}^{c} y(-\sigma_y) dy$$

$$M - bc^2 \sigma_y \left(1 - \frac{1}{3} * \frac{y_y^2}{c^2}\right)$$

De (1) tenemos:

$$M = \frac{3}{2} M_y \left(1 - \frac{1}{3} * \frac{y_y^2}{c^2}\right)$$

Donde:

M_y = *Máximo momento elástico*

Si $y_y \longrightarrow$ 0 entonces:

$$M = \frac{3}{2} M_y \quad Momento \; Plástico$$

Válida únicamente para materiales elastoplásticos de sección rectangular.

Para vigas de sección NO rectangular se utilizará la relación:

$$k = \frac{M_p}{M_y}$$

En donde:

M_p = Momento plástico

M_y = Momento elástico

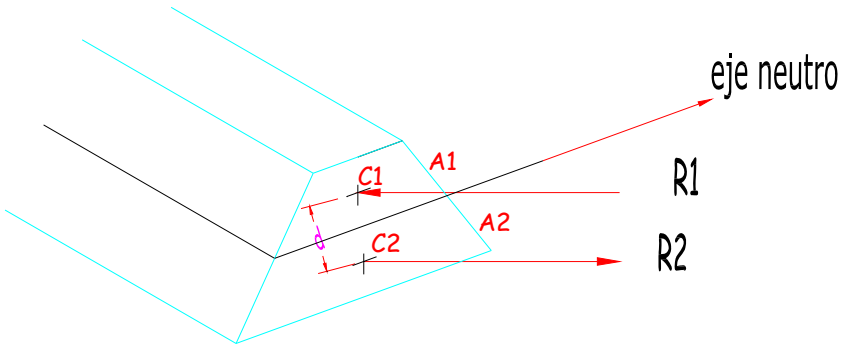
k = Factor de forma de la sección

$$M_p = k * M_y$$

Generalmente *k* no es igual a 1.5 por citar un ejemplo, para perfiles IPR (ala ancha), *k* varía de 1.08 a 1.14.

DEFORMACIONES PLÁSTICAS DE UN ELEMENTO CON UN SOLO PLANO DE SIMETRÍA:

Observe la siguiente figura:



$R_1 = R_2$

$$A_1\sigma_y = A_2\,\sigma_y$$

El eje neutro divide el área de la sección transversal en 2 partes, por lo que este eje no necesariamente coincide con el centroide del área de la sección.

Las líneas de acción de las resultantes pasan por los centroides C_1 y C_2, el momento plástico del elemento será:

$$M_p = \left(\frac{1}{2} A\sigma_y\right)d$$

En donde d = distancia entre centroides del par de fuerzas R_1, R_2.

3.2.- Esfuerzos cortantes por flexión.

Introducción:

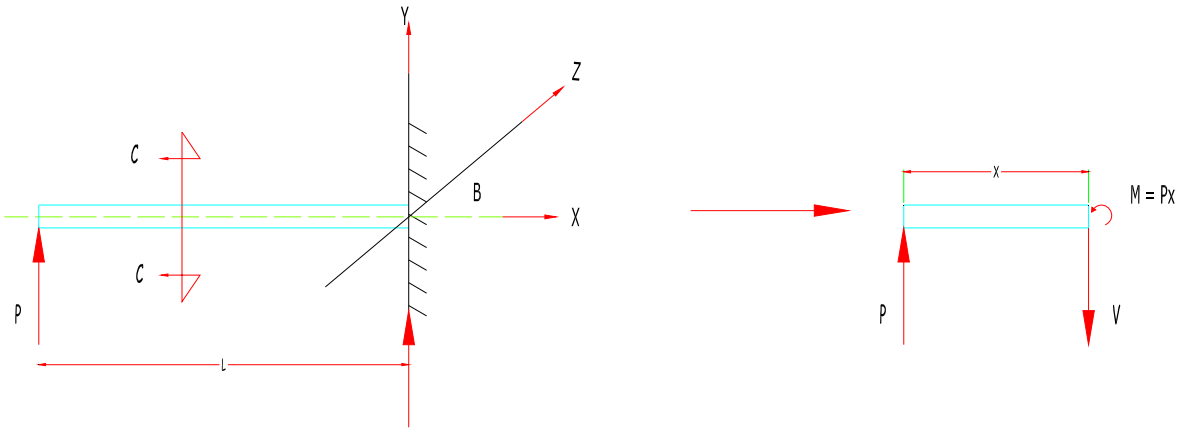
En este tema se describe la deducción de las ecuaciones que relacionan los esfuerzos cortantes que se producen en una viga bajo la acción de momentos flexionantes. Adicionalmente se presenta la ecuación que determina la magnitud de la fuerza cortante horizontal por unidad de longitud o "flujo por cortante".

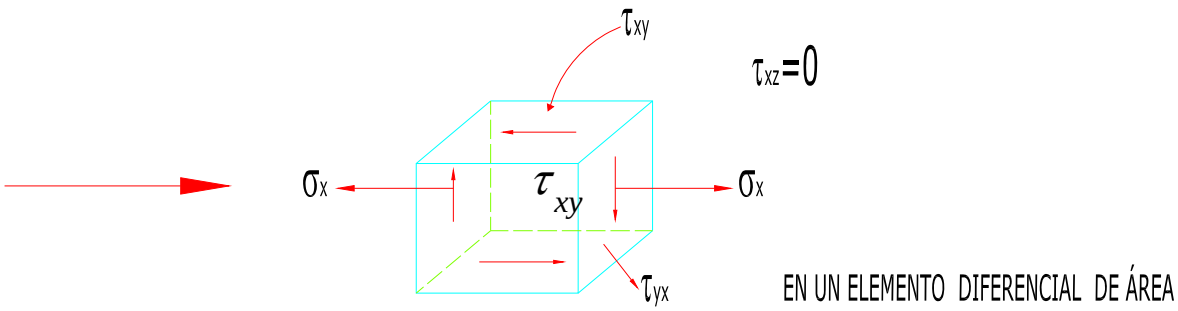
Objetivo(s):

Analizar el estado de esfuerzos cortantes producidos por la acción de momentos flexionantes.

Desarrollo:

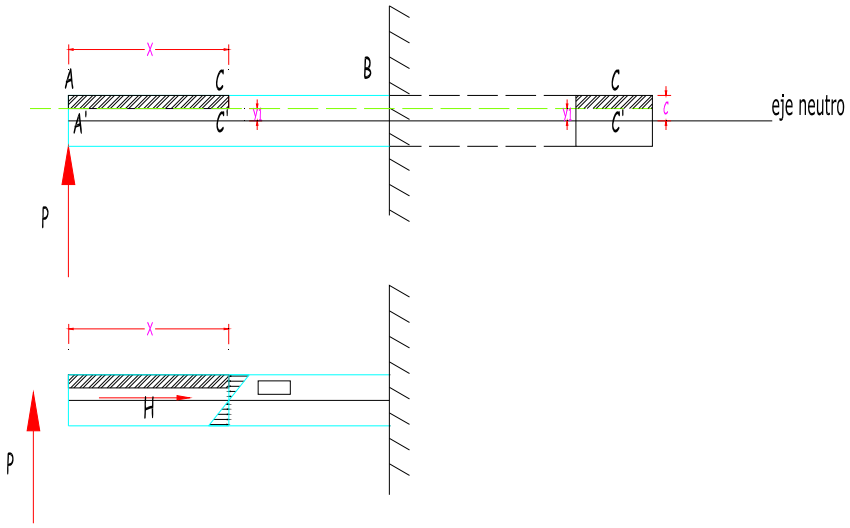
Cuando se ejercen esfuerzos cortantes τ_{xy} sobre la cara vertical de un elemento, se ejercen también esfuerzos iguales sobre las cargas horizontales del mismo elemento. Por lo tanto, existen esfuerzos cortantes longitudinales en todo elemento sometido a carga transversal. Observe el diagrama siguiente.





ESFUERZO CORTANTE EN UN PLANO HORIZONTAL:

Observe la siguiente figura.



$$\sigma_x = \frac{M\,y}{I} = \frac{P\,x\,y}{I}$$

$$\sigma_x dA = \frac{P\,x\,y}{I}\,dA$$

$$\sum F_x = 0 \quad para\ A\,C\,C''A'$$

$$H - \int \frac{P\,x\,y}{I} dA = 0$$

Despejando *H* y siendo *x* = cte. en la sección:

$$H = \frac{P\,x}{I}\int_{y=y_1}^{y=c} y\,dA$$

La integral representa el primer momento estático respecto al eje neutro de la sección arriba de $y = y_1$, entonces:

$$Q = \int_{y=y_1}^{y=c} y\,dA = A\bar{y}$$

Donde:

A = Área de la sección

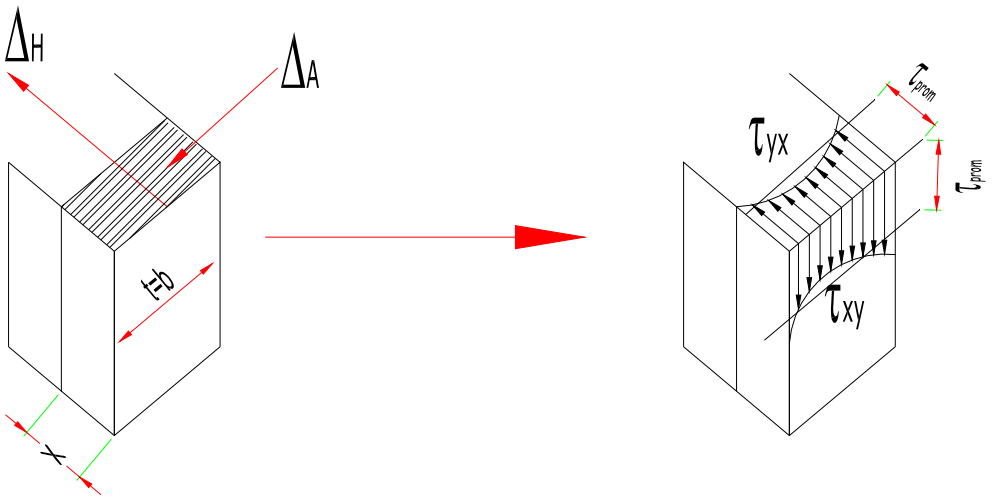
$\bar{y}$ = Distancia del centroide al eje neutro

$$H = \frac{PQ}{I}x$$

Dado que H es proporcional a x, entones para un valor dado de y_1 el cortante horizontal por unidad de longitud H/x es constante e igual PQ/I. Al cortante por unidad de longitud se le denomina "flujo por cortante" = "q".

$$q = \frac{PQ}{I} \rightarrow P = V \rightarrow q = \frac{VQ}{I}$$

Véase el siguiente diagrama:



$$\Delta H = q\Delta x = \frac{VQ}{I}\Delta x$$

$$\Delta A = t\Delta x$$

$$\tau_{prom} = \frac{\Delta H}{\Delta A} = \frac{VQ}{I} * \frac{\Delta x}{\Delta x t}$$

$$\tau_{prom} = \frac{VQ}{It}$$

En donde:

$\tau prom$ = Esfuerzo cortante promedio

V = Fuerza cortante vertical

Q = Primer momento estático de la sección respecto al eje neutro

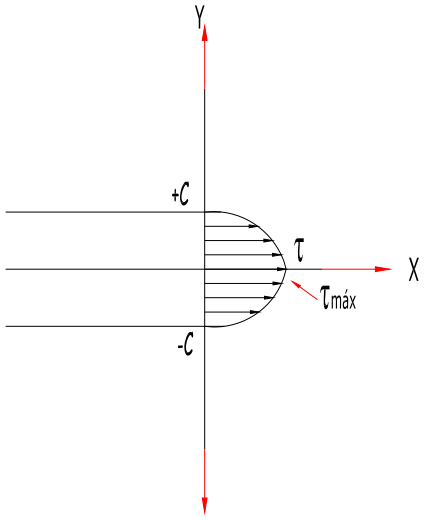
I = Momento de inercia de la sección

t = Ancho del corte

$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$ En las caras superior e inferior de la viga

$Si \frac{b}{h} \leq \frac{1}{4}$ *el* τ_{xy} *(vertical) y* τ_{yx} *(horizontal)* a lo ancho de la viga varia respecto a τ_{xy} en no más del 0.8%.

La distribución de $\tau prom$ en una sección rectangular es igual a:



$$\tau_{MAX} = \frac{3}{2} * \frac{V}{A}$$ (no relacionado al promedio)

Para vigas IPR, ó IPS, τ_{MAX} puede suponerse:

$$\tau_{MAX} = \frac{V}{A} \quad \text{Área del alma}$$

3.3.- Dimensionamiento por flexión y cortante en vigas de un solo material.

Introducción:

En este tema se presenta la metodología de diseño para establecer el tamaño de la sección que deba resistir los esfuerzos normales y cortantes por flexión, bajo la acción de momento flexionante. Es importante mencionar que en vigas largas el tamaño de la sección queda generalmente definido por la acción del esfuerzo normal por flexión, mientras que en vigas cortas con grandes cargas, rige el diseño por esfuerzos cortantes.

Objetivo(s):

Describir la metodología básica para el diseño por flexión y cortante en vigas rectangulares o secciones estructurales con doble eje de simetría de un solo material, así como las limitaciones de la misma.

Desarrollo:

GENERALIDADES:

El diseño de una viga es controlado normalmente por el máximo valor absoluto del momento flector en la viga, que se encuentra generalmente en la superficie de la viga:

$$\sigma_m = \frac{|M_{MAX}|C}{I}$$

En el caso general serán vigas de sección rectangular.

Excepciones:

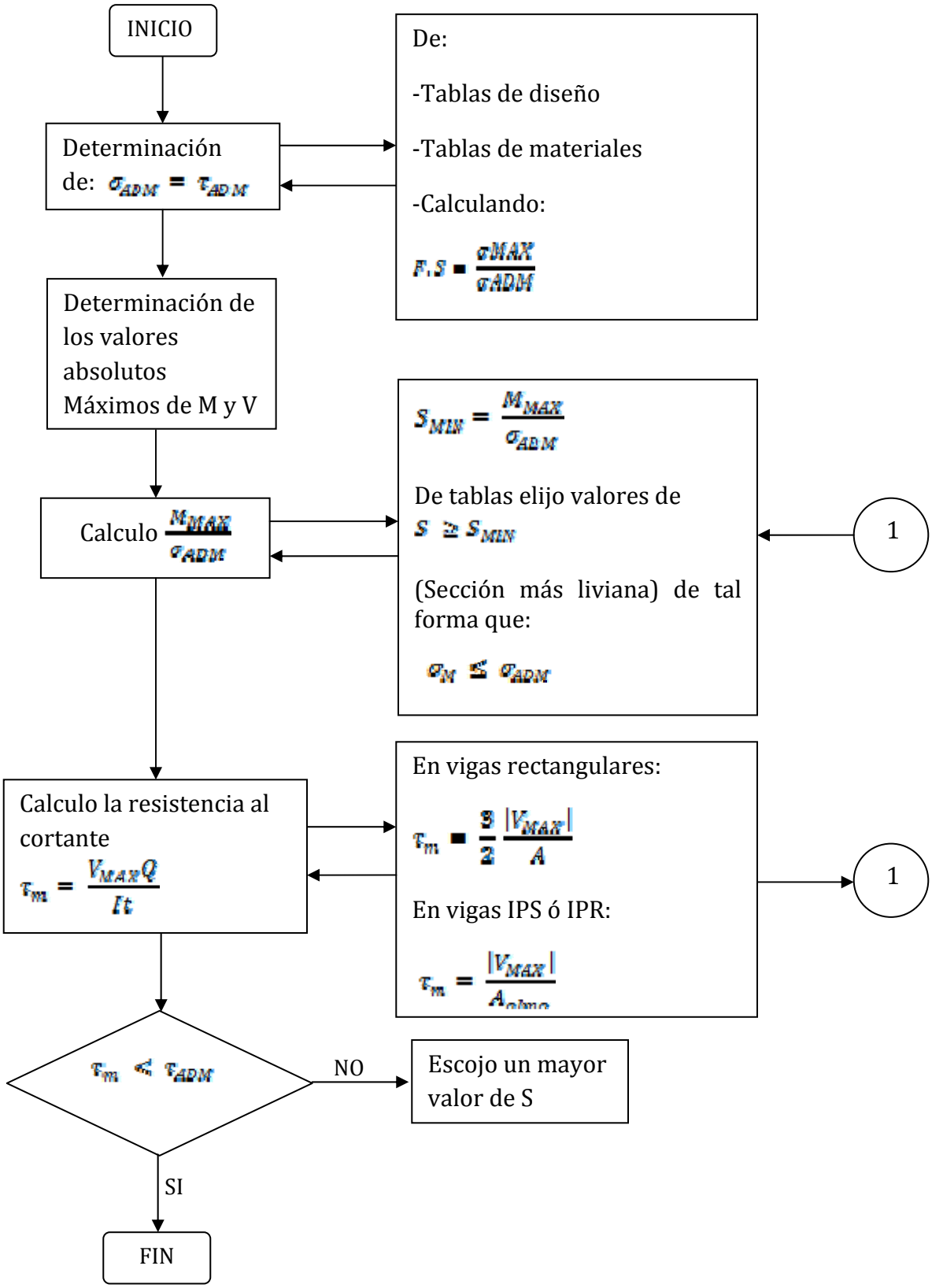
- Para ciertas formas de vigas, M será Máximo en otras partes de la viga (Algunos perfiles estructurales).
- Casos en que la viga y su diseño estarán determinados por el valor absoluto máximo del cortante.

  $$\tau_m = \frac{|V_{MAX}|Q}{It}$$

  Donde:
  Q = Momento de primer orden de área por arriba o debajo del eje neutro
  t = Ancho de la sección en el eje neutro.

Todo diseño debe cumplir con lo anterior y ser lo más económico posible, es decir que la viga sea de la sección de área más pequeña posible, o lo que es lo mismo, se busca tener la sección más ligera.

MÉTODO:


INICIO
Determinación de: $\sigma_{ADM} = \tau_{ADM}$
De:
-Tablas de diseño
-Tablas de materiales
-Calculando:
$F.S = \frac{\sigma MAX}{\sigma ADM}$
Determinación de los valores absolutos Máximos de M y V
Calculo $\frac{M_{MAX}}{\sigma_{ADM}}$
$S_{MIN} = \frac{M_{MAX}}{\sigma_{ADM}}$
De tablas elijo valores de $S \geq S_{MIN}$
(Sección más liviana) de tal forma que:
$\sigma_M \leq \sigma_{ADM}$
1
Calculo la resistencia al cortante
$\tau_m = \frac{V_{MAX} Q}{It}$
En vigas rectangulares:
$\tau_m = \frac{3}{2} \frac{|V_{MAX}|}{A}$
En vigas IPS ó IPR:
$\tau_m = \frac{|V_{MAX}|}{A_{alma}}$
1
$\tau_m \leq \tau_{ADM}$
NO
Escojo un mayor valor de S
SI
FIN

Limitaciones de lo anterior:

- Se considera que el σ_{ADM} es igual tanto en compresión como en tensión. En este caso se analiza los casos de tensión y compresión.
- Si la sección no es simétrica respecto al eje neutro.

Unidad 4. DEFORMACIÓN EN VIGAS.

Objetivo: Determinará el comportamiento geométrico antes de la falla de vigas bajo la acción de sistemas de fuerzas, aplicando la teoría de la deflexión en la solución de vigas.

Temas:

4.1.- Elástica en vigas.

4.2.- Método de la doble integración.

4.3.- Método de área de momentos.

4.4.- Revisión por deflexión en vigas de un solo material.

4.1.- Elástica en vigas.

Introducción:

En este tema se estudia la relación que existe entre la curvatura de una viga y el momento flexionante que la provoca, destacando la influencia de la rigidez de la viga en dicha relación. Así mismo, se presenta la deducción de la ecuación de la curva elástica.

Objetivo(s):

Analizar las relaciones entre curvatura, momento flexionante y rigidez, para la obtención de deformaciones por flexión o deflexiones en vigas prismáticas de un solo material.

Desarrollo:

GENERALIDADES:

Dentro del intervalo elástico, una viga de sección prismática sometida a flexión dura, adquiere una forma deformada circular. Dicha curvatura se expresa como:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad \textit{rigidez de la sección a la flexión}$$

Donde:

ρ = Radio de curvatura

M = Momento flector

E = Módulo de elasticidad

I = Momento de inercia de la sección

Esta relación es válida para cualquier tipo de sección, sin embargo, tanto el momento flector como la curvatura de la superficie neutra varían de una sección a otra.

Sea x la distancia de la sección al extremo izquierdo de la viga, tenemos:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{Mx}{EI}$$

(1)

Ecuación de la curva elástica:

Del cálculo básico tenemos que la curvatura de una curva plana en un punto Q (x, y) se expresa de la forma siguiente:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

En donde dy/dx y d^2y/dx^2 son la primera y segunda derivada de la función $y(x)$ representada por esa curva.

Para el caso de la curva elástica dy/dx (pendiente) es muy pequeña y su cuadrado es despreciable. Pudiendo escribir entonces, en la relación a la anterior:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Igualando con (1), tenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

Que es la “ecuación diferencial fundamental de la curva elástica”.

4.2.- Método de la doble integración.

Introducción:

Se presentan los aspectos básicos a considerar para la solución de deformaciones por flexión por el método de la doble integración y las limitaciones del método para su aplicación.

Este método permite determinar los flechamientos en cualquier sección de la viga, pero tiene el inconveniente de que para sistemas de cargas puntuales se generan numerosas constantes de integración cuya determinación puede complicarse.

Objetivo(s):

Describir los conceptos y consideraciones básicas para la determinación de deformaciones por flexión, en vigas de un solo material, aplicando el método de la doble integración.

Desarrollo:

Considerando el caso de que la sección es constante y homogénea a todo lo largo, es decir, que no se tienen cambios en su rigidez podemos hacer con la ecuación de la curva elástica, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$, lo que a continuación se describe:

- Multiplico la ecuación (2) por EI e integro con respecto a *x*.

$$EI\,\frac{dy}{dx} = \int_0^x M(x)dx + C_1 \qquad (3)$$

En donde C_1 es la constante de integración. Si $EI\,\frac{dy}{dx} = EI\,\theta\,(x)$, tenemos entonces:

$$EI\,\theta\,(x) = \int_0^x M(x)dx + C_1$$

En donde $\theta\,(x)$ = Ángulo medido en radianes.

- Integrando (3) nuevamente con respecto a x tenemos:

$$EI\,y = \int_0^x \left[\int_0^x M(x)dx + C_1\right] + C_2$$

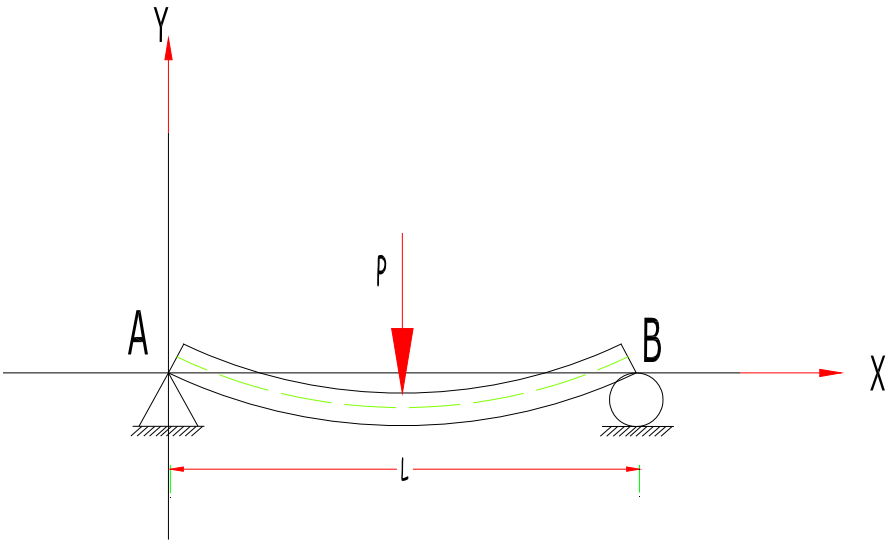
$$EI\ y = \int_0^x dx \int_0^x M(x)dx + C_1 x + C_2$$

En donde C_2 es una segunda constante de integración.

Las constantes C_1 y C_2 se determinan con base a las condiciones de contorno ó más bien dicho, las condiciones impuestas por la viga en sus apoyos.

Se analizarán tres casos:

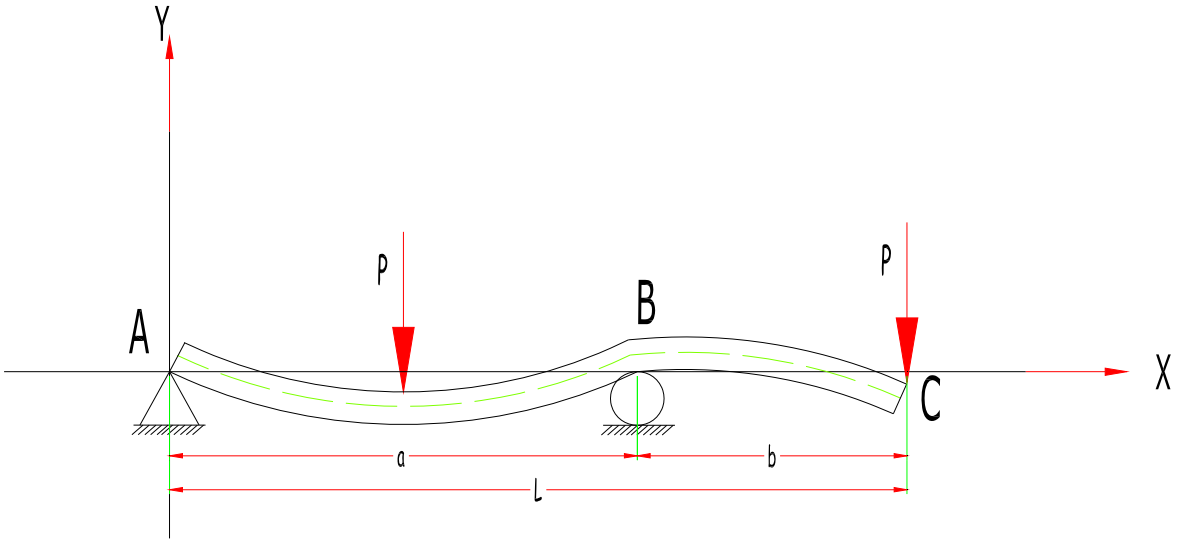
A) Vigas simplemente apoyadas



$y_A = 0$ $x_A = 0$ $\theta_A \neq 0$

$y_B = 0$ $x_B = L$ $\theta_B \neq 0$

B) Vigas simples con extremo en voladizo

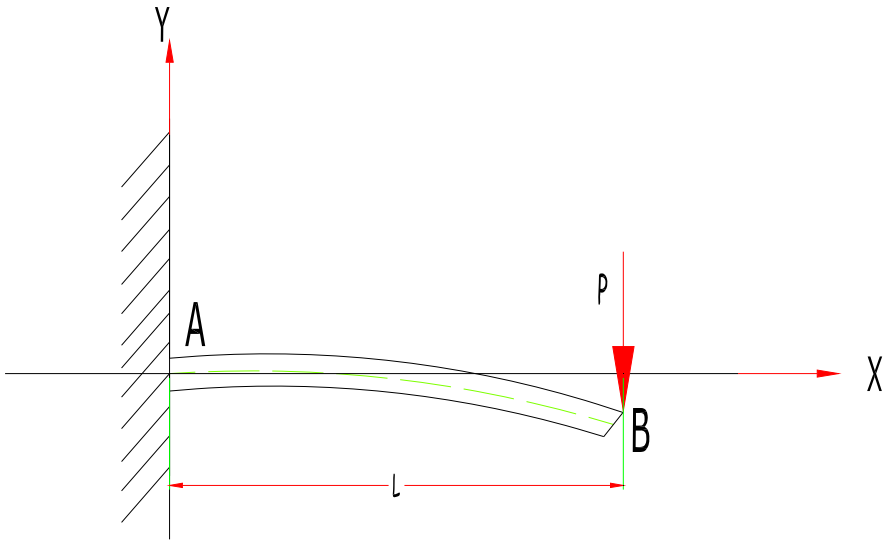


$y_A = 0$ $x_A = 0$ $\theta_A \neq 0$

$y_B = 0$ $x_B = a$ $\theta_B \neq 0$

$y_C \neq 0$ $x_C = L$ $\theta_C \neq 0$

C) Cantiléver (viga en voladizo)



$x_A = 0 \quad y_A = 0 \quad \theta_A = 0$

$x_B = L \quad y_B \neq 0 \quad \theta_B \neq 0$

4.3.- Método de área de momentos.

Introducción:

Se presentan los aspectos básicos a considerar para la solución de deformaciones por flexión por el método de las áreas de momentos, así como las limitaciones del método para su aplicación.

Este método, de naturaleza semigráfica, solo permite determinar flechamientos en determinadas secciones de la viga que son de interés para el diseñador y tiene limitaciones semejantes al método anterior.

Objetivo(s):

Describir los conceptos y consideraciones básicas para la determinación de deformaciones por flexión, en vigas de un solo material, aplicando el método del área de momentos.

Desarrollo:

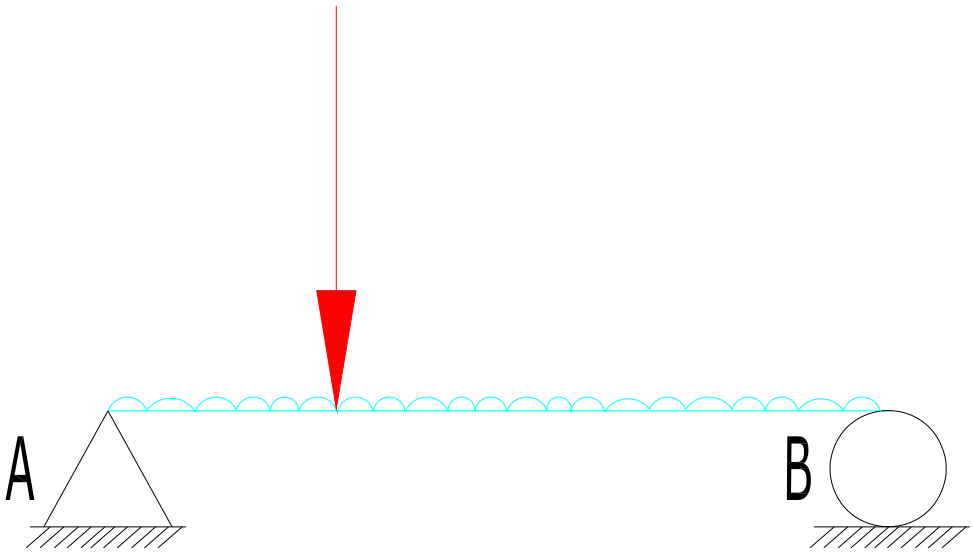
A diferencia del método de la doble integración en el que el momento flector se expresa como función de *x*, para posteriormente integrar esa función; en el método del área de momentos, se traza un diagrama que muestra la variación de M/EI a lo

largo de la viga, evaluándose los momentos y las áreas de los diagramas obtenidos de su distribución de carga.

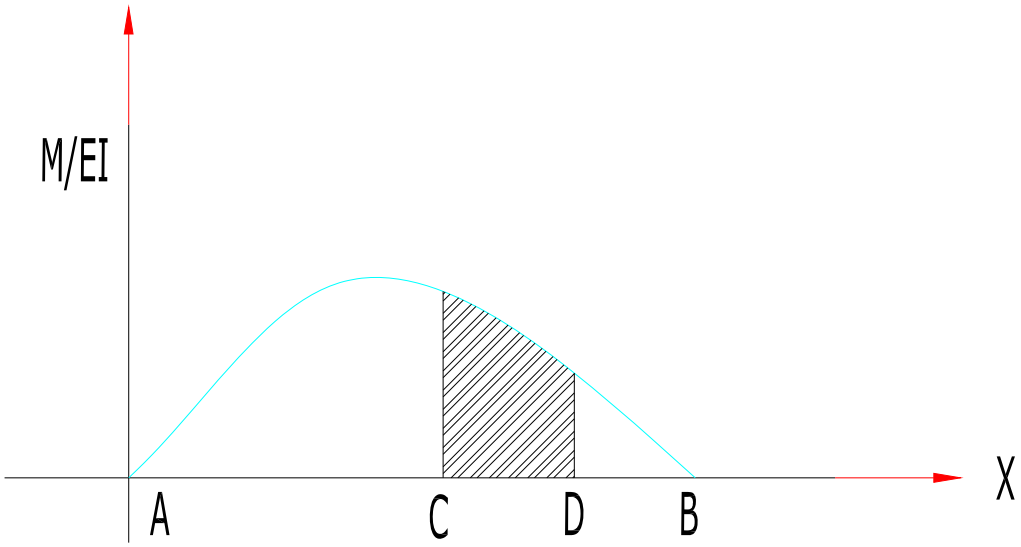
Este método se basa en dos teoremas:

TEOREMA 1

Sea una viga AB, sometida a una carga arbitraria.



Si EI (rigidez) es constante, el diagrama de momentos flectores será básicamente el mismo que resultaría de dividir el momento flector entre la rigidez.



Tenemos que:

$$\frac{d_y}{d_x} = \theta \leftarrow \textit{derivando ambos lados de la igualdad respecto a } x$$

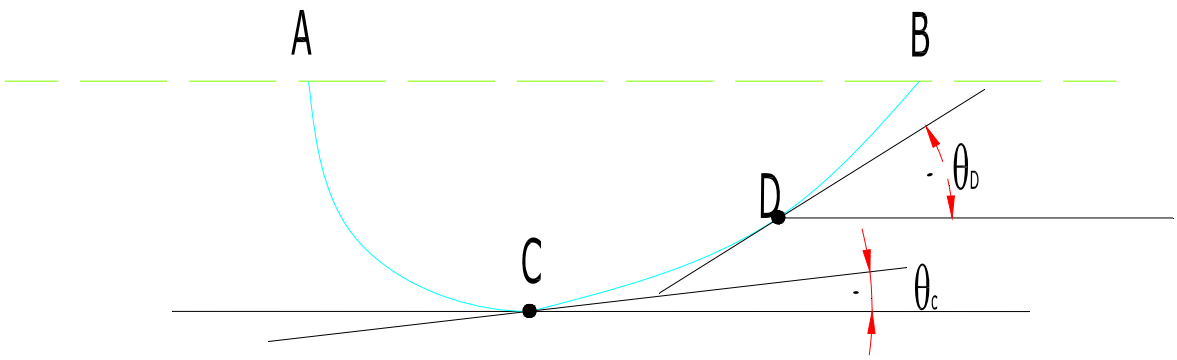
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{d\theta}{dx} \quad entonces \quad d\theta = \frac{M}{EI}dx$$

Sean *C* y *D* dos puntos arbitrarios, e integrando ambas partes de la ecuación tenemos:

$$\int_{\theta_C}^{\theta_D} d\theta = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,dx \qquad entonces \quad \theta_D - \theta_C = \int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,dx$$

En donde:

θ_C, θ_D = Pendientes de C y D respectivamente.



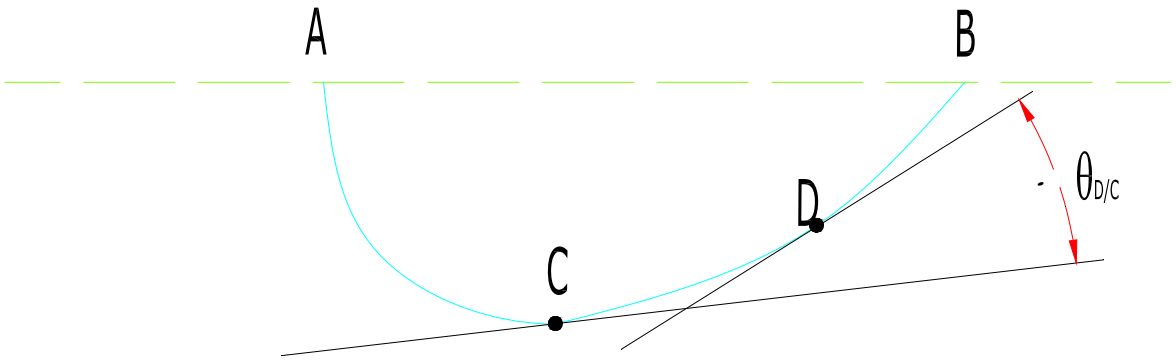
La parte $\int_{x_C}^{x_D} \frac{M}{EI}\,dx$ = Área bajo el diagrama $\frac{M}{EI}$ entre C y D.

La parte $\theta_D - \theta_C =$ Ángulo entre las tangentes a la curva elástica.

Tenemos finalmente:

$$\theta_{D/C} = \theta_D - \theta_C$$

$$\theta_{D/C} = Area\ bajo\ el\ diagrama\ \frac{M}{EI}\ entre\ C\ y\ D$$



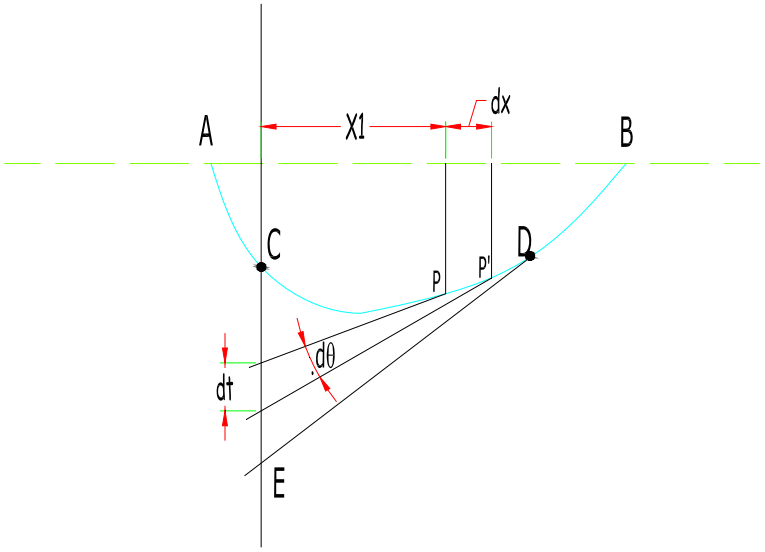
NOTA:

+ Si el área bajo el diagrama $\frac{M}{EI}$ es positivo el ángulo $\theta_{D/C}$ gira en sentido contrario a las manecillas del reloj y también es positivo; y viceversa (un área negativa corresponde a una rotación en el sentido de las manecillas del reloj)*

*(Rotación de la tangente a la curva elástica).

TEOREMA 2

Véase el siguiente diagrama de la viga AB:



Se observa que las tangentes de la curva elástica en P y P´, intersectan un segmento de longitud *dt* en la línea vertical que pasa por C. Ya que la pendiente θ en P y $d\theta$ son muy

pequeños, se supone que *dt* es igual al arco de círculo, de radio X_1, que subtiende el ángulo $d\theta$; se tiene entonces:

$$dt = X_1\, d\theta$$

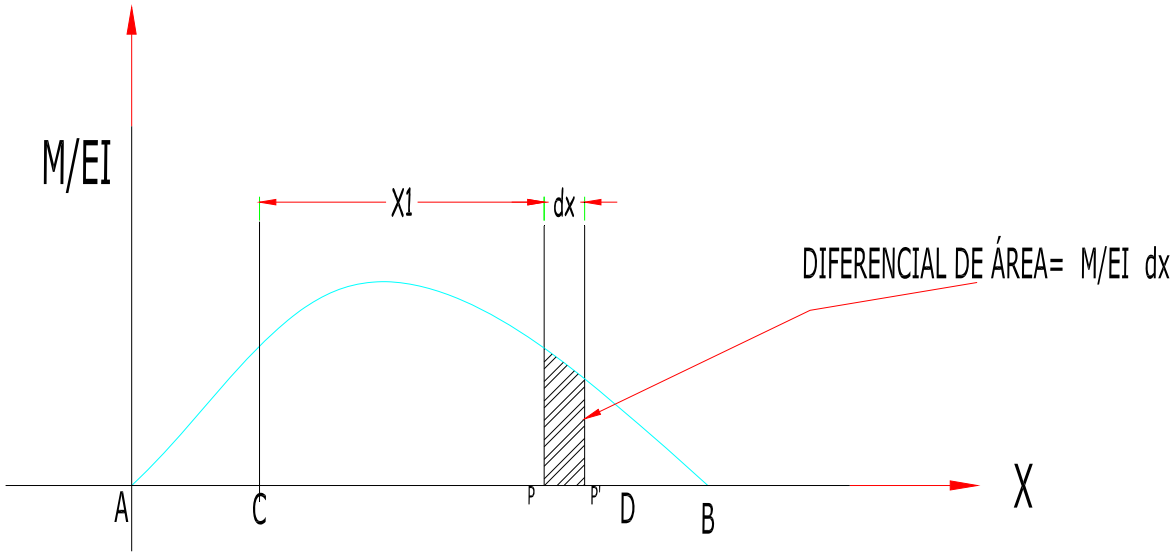
$$Si\ d\theta = \frac{M}{EI}dx \rightarrow dt = X_1 \frac{M}{EI}dx$$

Integrando tenemos:

$$t_{C/D} = \int_C^D X_1 \frac{M}{EI}\, dx$$

En donde la parte izquierda de la ecuación es llamada desviación tangencial de C respecto a D; (distancia vertical entre C y la tangente D).

Véase el siguiente diagrama:

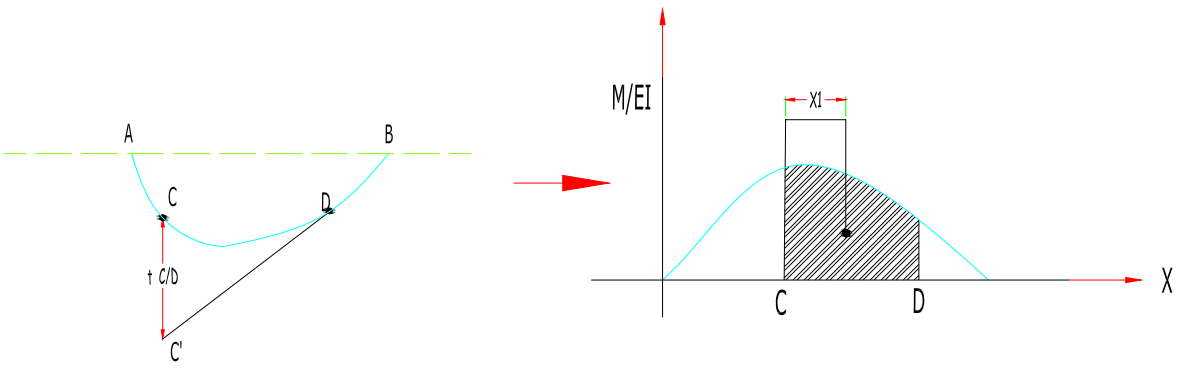


Se observa que $\left(\frac{M}{EI}\ dx\right) x1$ = es el momento de primer orden con respecto al eje C.

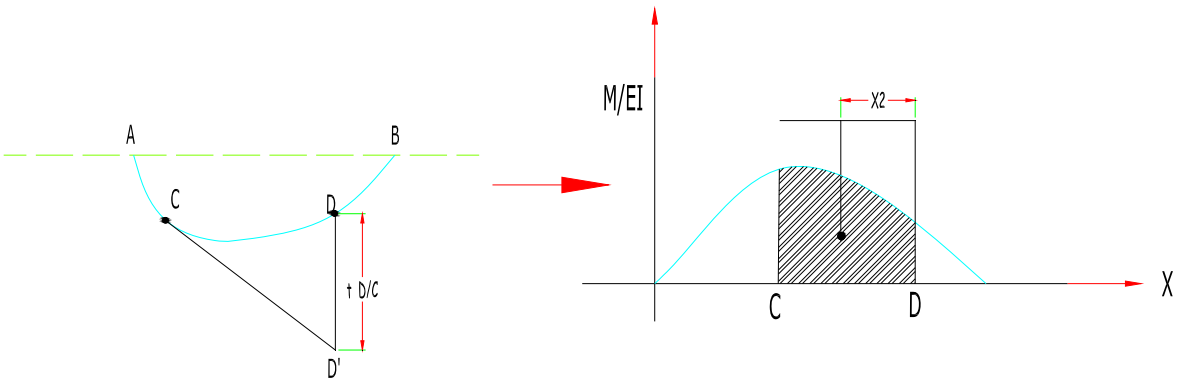
De acuerdo a lo anterior tenemos:

La desviación tangencial $t_{C/D}$ *de C con respecto a D, es igual al momento de primer orden del área bajo la curva M/EI, entre los puntos C y D, con respecto al eje vertical que pasa por C.*

Queda entonces:



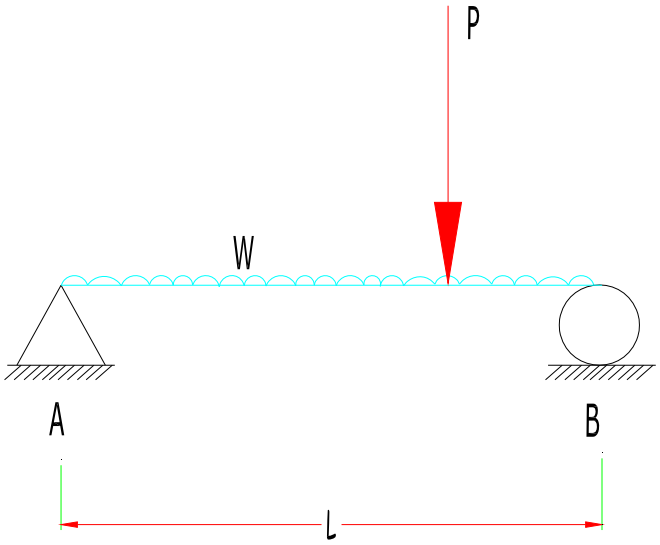
$$t_{C/D} = (\text{Área entre } C \text{ y } D)\,\overline{x}_1$$



$$t_{D/C} = (\text{Área entre } C \text{ y } D)\,\overline{x}_2$$

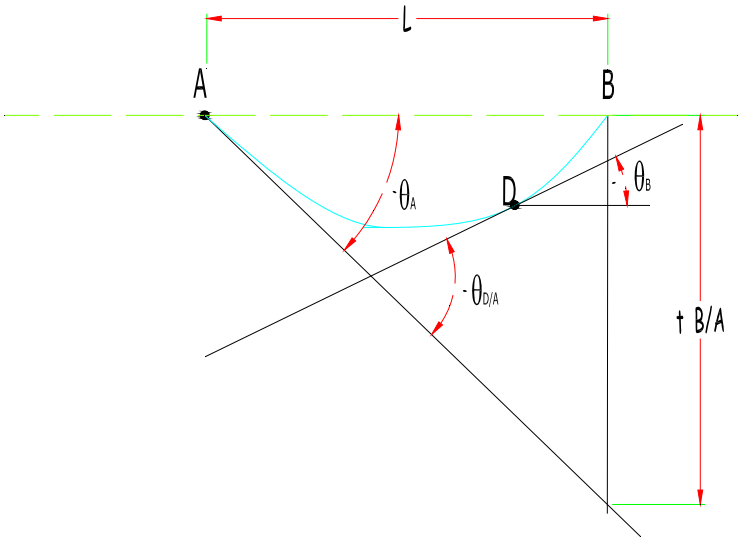
VIGAS CON CARGA ASIMÉTRICA:

Sea la viga siguiente:



Hasta ahora el método analizado toma una tangente de referencia la cual ha tenido un valor de cero. Para vigas con carga asimétrica el planteamiento es un poco diferente.

En este caso se toma la tangente de referencia en uno de los apoyos de la viga. Véase el siguiente dibujo.



Puede verse que:

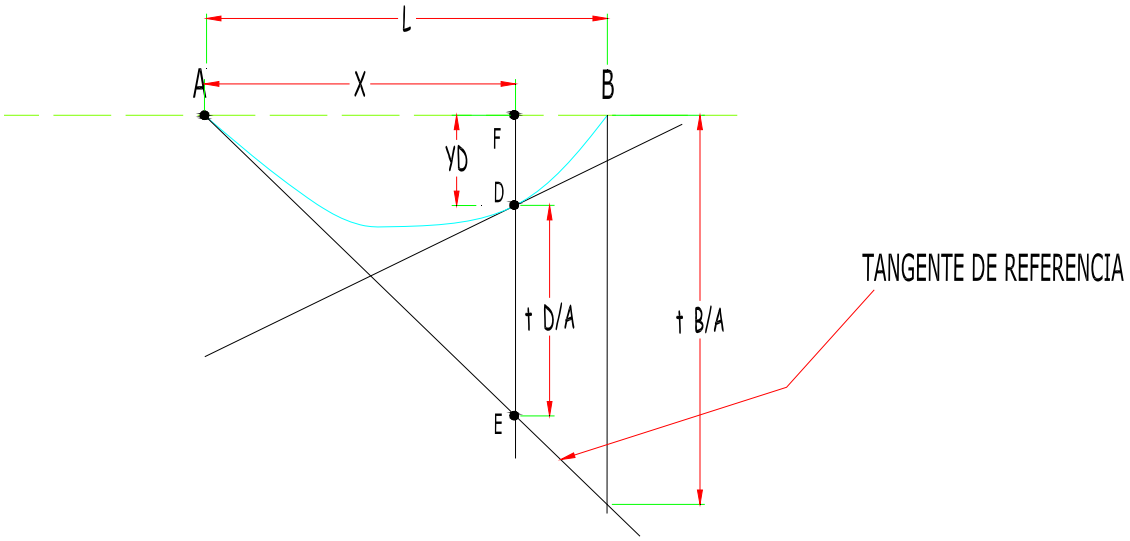
$$\theta_A = -\frac{t_{B/A}}{L}$$

Determinada la tangente en cualquiera de los apoyos, la pendiente de la tangente θ_D en un punto cualquiera D, se determina:

$$\theta_D = \theta_A + \theta_{D/A}$$

$$\theta_{D/A} = \theta_D - \theta_A$$

La desviación tangencial $t_{D/A}$ se obtiene de la manera siguiente, observe el siguiente dibujo:



$DE = t_{D/A}$ = *Distancia vertical entre* D *y la tangente de referencia.*

$FD = y_D$ = *Distancia vertical entre* D *y la horizontal de la viga en cuestión.*

Por triángulos semejantes se observa:

$$\frac{FE}{x} = \frac{t_{B/A}}{L}$$

$$FE = \frac{x}{L} t_{B/A}$$

$$y_D = ED - FE = t_{D/A} - \frac{x}{L} t_{B/A}$$

4.4.- Revisión por deflexión en vigas de un solo material.

Introducción:

En algunos diseños de vigas de un solo material, su comportamiento queda determinado mas por su rigidez, que por su resistencia o capacidad a flexión o cortante. Ejemplo de ello es que por debajo de las vigas en edificios, es común

Unidad 5. TORSIÓN.

Objetivo: Analizará el comportamiento de elementos estructurales sujetos a torsión.

Temas:

5.1.- Elementos de sección circular maciza.

5.2.- Elementos de sección hueca.

5.3.- Elementos de pared delgada.

5.1. Elementos de sección circular maciza.

Introducción:

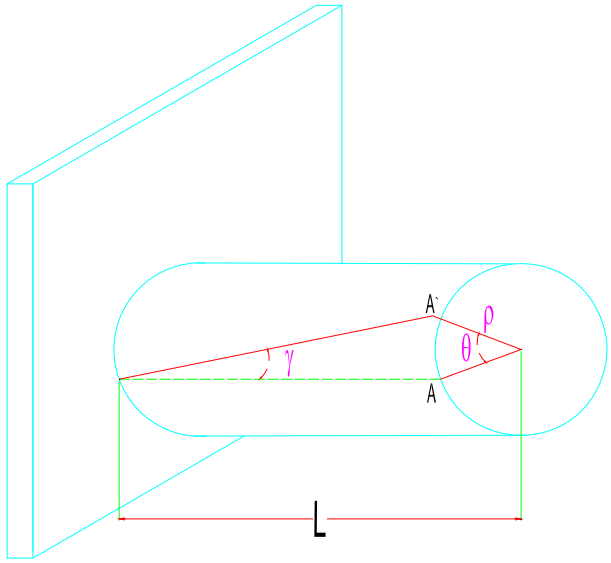
En este tema se presentan las hipótesis básicas para la determinación de la ecuación de esfuerzos en secciones circulares macizas sometidas a momentos torsionantes.

Objetivo(s):

Analizar el comportamiento a torsión para el caso de árboles de sección circular maciza.

Desarrollo:

Observe la siguiente figura:



Se observa que para valores "pequeños" de la longitud del arco A-A, ésta puede expresarse como: L ɣ; por otra parte se tiene que A-A = ρθ, luego entonces se deduce que

$$L\gamma = \rho\theta \quad \text{ó bien}$$

$$\gamma = \frac{\rho\theta}{L} \ldots\ldots\ldots (a)$$

Donde ɣ y θ, se expresan en radianes.

La ecuación anterior muestra que la deformación a cortante γ en un punto dado del eje de torsión, es proporcional al ángulo de giro θ.

También se muestra que ɣ es proporcional a la distancia ρ desde el eje de la flecha, hasta el punto considerado. Por lo tanto, la deformación unitaria a cortante ɣ en una flecha circular, varía linealmente con la distancia desde el eje de la pieza.

Se deduce de la ecuación (a) que la deformación a cortante es máxima en la superficie de flecha donde ρ = c. Así es que

$$\gamma_{máx} = \frac{c\theta}{\mathrm{L}} \ldots\ldots\ldots (b)$$

Eliminando θ de las ecuaciones (a) y (b), la deformación a una distancia ρ del eje de la flecha, puede escribirse como

$$\gamma = \frac{\rho}{L} \quad \text{y} \quad \gamma_{máx} = \frac{c}{L} \quad \text{y entonces}$$

$$\gamma = \frac{\rho}{c}\gamma_{máx} \ldots\ldots\ldots (c)$$

Considérese ahora el caso de que un momento (par) de torsión **T**, es tal que todos los esfuerzos cortantes en el eje, se encuentran por debajo de su resistencia de fluencia $\boldsymbol{\sigma_y}$ y por debajo también del límite de proporcionalidad, por lo tanto, se puede aplicar la ley de Hooke, ya que no habrá deformaciones permanentes; de manera que

$$\tau = G\gamma \ldots\ldots\ldots (d)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (c) por **G**, se escribe

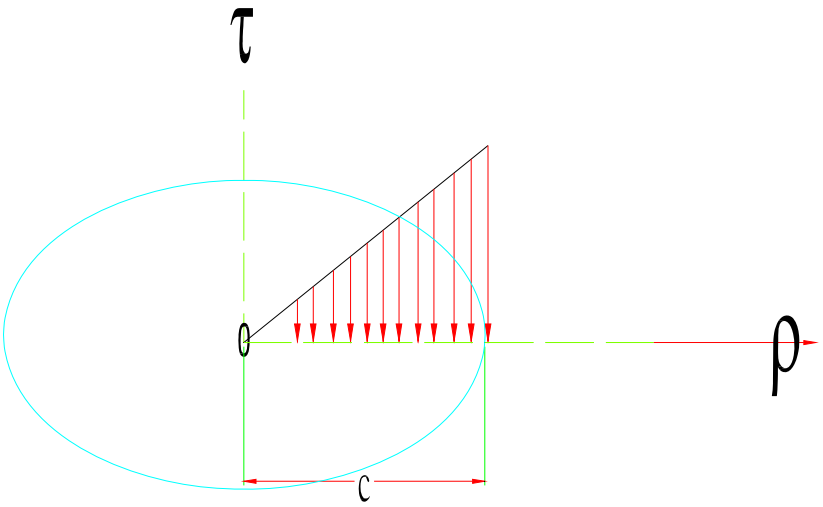
$$G\gamma = \frac{\rho}{c} G\gamma_{máx}$$

o utilizando la ecuación (d) y recordando que para un material isotrópico y homogéneo y sin sobrepasar el límite de proporcionalidad:

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{máx} \ldots\ldots\ldots (e)$$

La ecuación (e) muestra que en tanto el límite de proporcionalidad no se excede en ninguna parte de la sección circular: el esfuerzo cortante en la flecha, varía linealmente con la distancia ρ desde el eje de la barra.

La figura siguiente muestra la distribución de esfuerzos en una flecha circular maciza de radio c.



Tomando en consideración que la suma de los momentos de las fuerzas elementales ejercidas sobre la sección transversal de una flecha circular, debe ser igual a la magnitud T del par ejercido sobre dicha flecha, entonces:

$$\int \rho(\tau\, dA) = T \ldots\ldots (f)$$

Sustituyendo τ de la ecuación (e), se escribe:

$$T = \int \rho\, \tau\, dA = \frac{\tau_{máx}}{C} \int \rho^2 dA$$

La integral que aparece en el segundo miembro de la ecuación, representa el momento polar de inercia **J**, de la sección transversal, con respecto a su centro O; resulta entonces que:

$$T = \frac{\tau_{máx}}{C} J \text{ y finalmente}$$

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{J} \quad \text{ó} \quad \tau = \frac{T\rho}{J}$$

La ecuación de la izquierda es para expresar el esfuerzo cortante máximo en la periferia de la sección y la derecha para expresar el mismo efecto a cualquier distancia **ρ** del eje de la flecha.

En conclusión, las ecuaciones inmediatas anteriores, se utilizan para determinar los esfuerzos cortantes por torsión elástica en secciones circulares macizas y en ellas:

$$J = \frac{1}{2}\pi C^4 \text{ .....(i)}$$

Por otra parte, retomando la ecuación (b), se tiene que:

$$\gamma_{máx} = \frac{c\theta}{L} \text{.....}(b)$$

Pero dentro del rango elástico, como ya se mencionó, el esfuerzo de fluencia no se excede en ningún punto de la sección, de tal forma que al aplicar la ley de Hooke, se tiene que:

ɣmáx=τmáx/G=Tc/JG (j) cambiar a forma de quebrado

Por lo que igualando los miembros derechos de las ecuaciones (b) y (j) y despejando para θ, queda:

Θ=TL/JG (k) cambiar a forma de quebrado

Siendo θ el ángulo de giro de una sección circular maciza de longitud L, sometida a un momento torsionante T sobre su eje. Tanto ɣ como θ se expresan en radianes.

5.2. Elementos de sección circular hueca.

Introducción:

En este tema se presenta la ecuación de esfuerzos cortantes en secciones circulares huecas sometidas a momentos torsionantes.

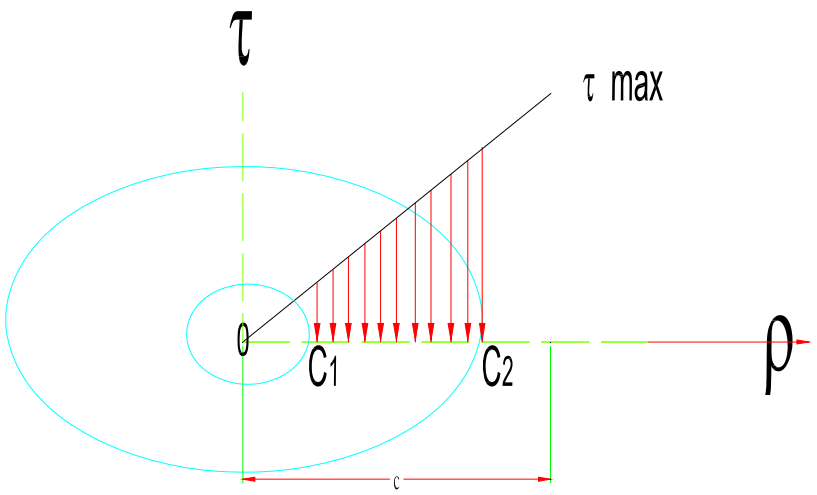
Objetivo(s):

Analizar el comportamiento a torsión para el caso de árboles de sección circular hueca.

Desarrollo:

En la figura siguiente, se muestra la distribución de los esfuerzos cortantes en una flecha circular hueca, con radio exterior $\mathbf{c_2}$ y radio interior $\mathbf{c_1}$. Las deducciones hechas anteriormente para determinar esfuerzos y deformaciones en secciones macizas son válidas para las huecas, sólo es necesario considerar que J tiene la expresión que se muestra a continuación:

$$J = \frac{1}{2}\pi\left(c_2^4 - c_1^4\right) \qquad (1)$$



5.3 Elementos de pared delgada

Introducción:

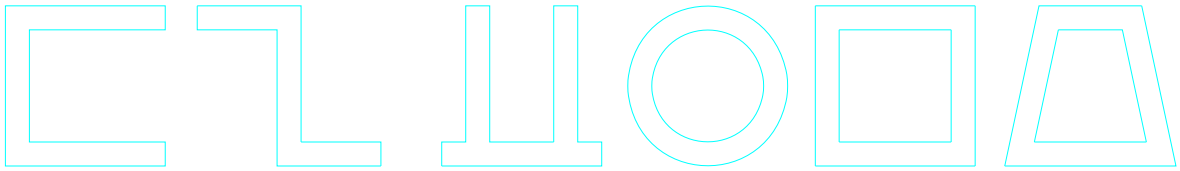
En este tema se presenta la deducción de la ecuación para calcular esfuerzos cortantes en secciones de pared delgada sometidas a momentos torsionantes.

Objetivo(s):

Analizar el comportamiento a torsión para el caso de elementos cuya sección es de pared delgada.

Desarrollo:

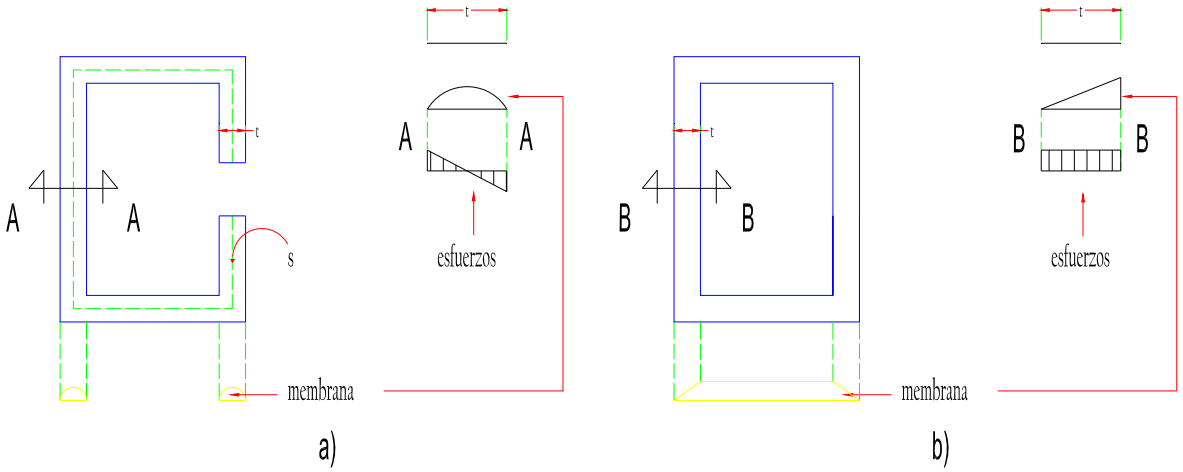
En la construcción de máquinas como las aeronaves, es necesario resolver con frecuencia el problema de torsión para piezas denominadas de pared delgada. Las características geométricas de estas secciones es que su espesor es "pequeño", en comparación con otras dimensiones, como puede verse en la siguiente figura:



A diferencia de los elementos de sección transversal circular como las descritas, los de pared delgada, cualquiera que sea su forma, pueden ser analizados de manera relativamente simple para obtener la magnitud de esfuerzos y deformaciones causados por la aplicación de momento torsionante, tanto en secciones abiertas como en cerradas.

La distribución de esfuerzos cortantes en la sección transversal en elementos de este tipo, se establece mediante la "analogía de la membrana". En la figura (a) se observa que la tangente a la membrana cambia de signo proximadamente en el centro del espesor de la pared y se admite que los esfuerzos cortantes varían linealmente desde este centro hacia los bordes.

En la figura (b), la tangente a la membrana se puede considerar constante y en consecuencia los esfuerzos cortantes permanecen uniformes dentro del espesor de la pared.



5.3.1 Elementos de pared delgada con sección transversal abierta

Si en la figura (a) se extiende o desdobla la sección transversal para convertirla en un rectángulo, la forma de la membrana y por tanto de los esfuerzos cortantes no varían considerablemente. Es decir, los esfuerzos cortantes antes y después de desdoblar la sección, serán aproximadamente los mismos.

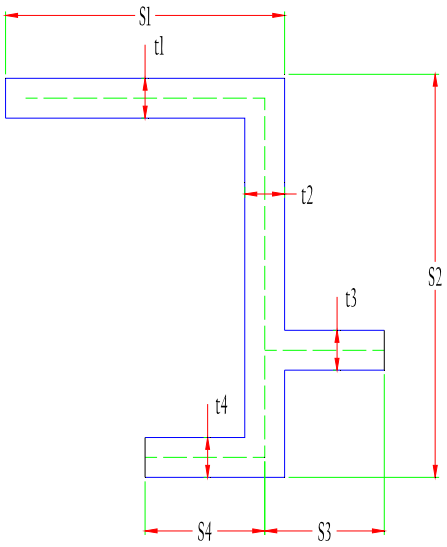
Los esfuerzos y deformaciones se determinan con las fórmulas utilizadas para secciones rectangulares, tratadas más adelante, con la salvedad de que en esta caso a/b>>10, por lo tanto,de la Tabla A: $\alpha = \beta = 1/3 = 0.333$, luego entonces:

$$=\tau máx = T/\alpha t^2 s = 3T/t^2 s \text{ y } \theta = TL/\beta G\, t^2 s = 3TL/GT^3 s \ldots (l)$$

Donde "t" es el espesor de la pared, es decir, el lado meno de la tabla y "s" la longitud del contorno de la sección o lado mayor "A" de la misma tabla.

a/b	1	1.2	1.5	1.75	2	2.5	3	4	5	6	8	10	20	∞
α	0.208	0.219	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.291	0.299	0.307	0.312	0.319	0.333
β	0.1406	0.166	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.291	0.299	0.307	0.312	0.319	0.333
η	1.0000	0.944	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753	0.745	0.744	0.743	0.742	0.742	0.742	0.742

Cuando se trata de elementos de pared delgada con sección transversal como la mostrada y no puede ser "extendida" ni transformada en un rectángulo, se resuelve de la siguiente forma (Observe la figura siguiente):



Los denominados t^2s y t^3s de las expresiones (h), se obtienen como se indica enseguida:

$$t^2s = \sum_{i=1}^{n} ti^2 s_1 = \left(t_1{}^2 s_1 + t_2{}^2 s_2 + t_3{}^2 s_3 + \ldots\ldots\ldots + t_n{}^2 s_n\right) \quad \text{Donde:}$$

(¡=1, 2, 3……..n) y n = número de segmentos

$$t^3s = \sum_{i=1}^{n} ti^3 s_1 = \left(t_1{}^3 s_1 + t_2{}^3 s_2 + t_3{}^3 s_3 + \ldots\ldots\ldots + t_n{}^3 s_n\right), \text{ de manera que}$$

al sustituir estos valores se llega a:

$$\tau = \frac{3T}{\sum_{i=1}^{n} t_1^2 si} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{3TL}{\sum_{i=1}^{n} t_1^3 si} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ec(m)}$$

De la analogía de la membrana se desprende que los esfuerzos cortantes máximos actúan en el segmento de mayor espesor, esto es

$$\tau_{máx} = \frac{3Tt_{máx}}{\sum_{i=1}^{n} t_1^3 si} = \frac{Tt_{máx}}{Jr} \ldots\ldots \text{ec(n)}$$

Siendo $Jr = \beta t^3 s.$

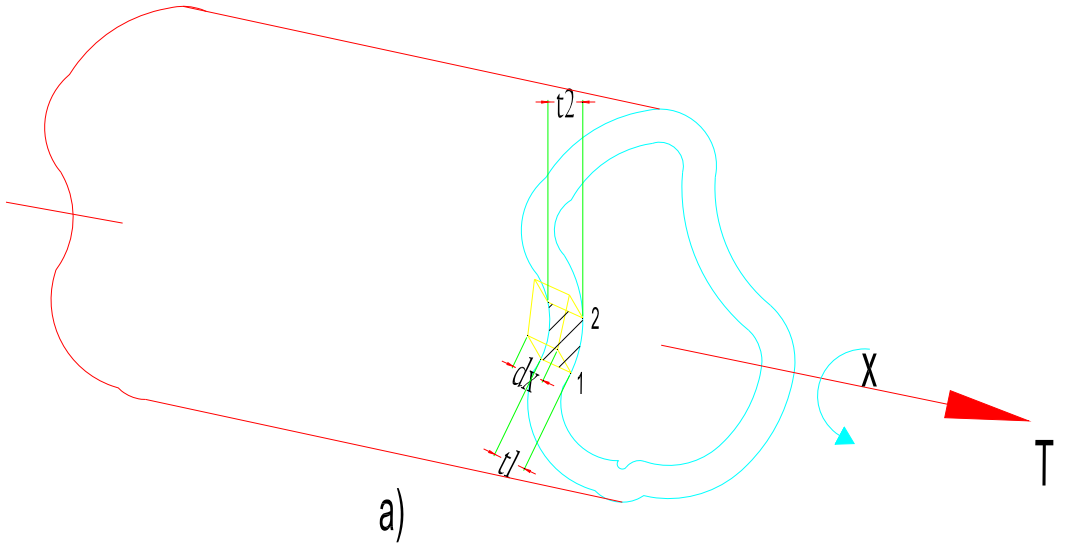
Para calcular el máximo esfuerzo cortante en cualquier segmento i, es válida la expresión siguiente:

$$\pi i = \tau_{más}\, i = \frac{3Ti}{t_i^2 si} = \frac{3Tti}{\sum_{i=1}^{n} t_1^2 si} \text{ .....(ñ)}$$

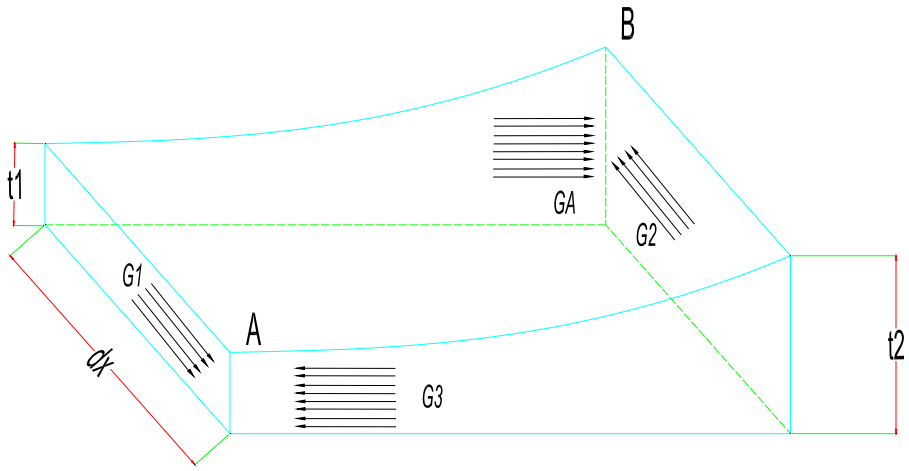
Este método es aproximado y no toma en cuenta las concentraciones de esfuerzos en las esquinas entrantes; para evitarlo, estas zonas se redondean.

5.3.2 Elementos de pared delgada con sección transversal cerrada

Sólo se analizan secciones cerradas con únicamente un hueco. Consideremos una sección cerrada, tubular de forma arbitraria con espesor de las paredes variable, como la de la figura (a), sometida a un momento torsionante T. Como se mencionó antes, el esfuerzo cortante es uniforme dentro del espesor de la pared.



Aislando un elemento infinitesimal de longitud dx, figura (b) y distancia arbitraria entre los puntos 1 y 2. Este elemento debe estar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas F_1, F_2, F_3 y F_4, que se obtienen al multiplicar el esfuerzo cortante por el área respectiva en que actúan, entonces se tiene que: $\sum Fx=0$, resultando que $F_1= F_3$, pero $F_1= \tau_1 t_1 dx$ y $F_3 = \tau_2 t_2 dx$ siendo $t_1 \neq t_2$.



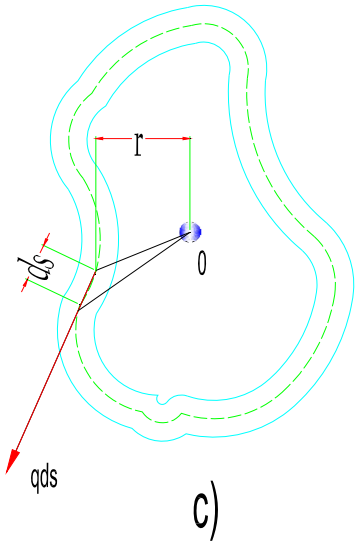
b)

Si se considera a la esquina A, figura (b), se nota que, de acuerdo con la ley de reciprocidad de los esfuerzos cortantes: $\tau_1 = \tau_3$ y en la esquina B, $\tau_2 = 4$, además de observar que $\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = \tau_i t_i = q$ = constante.

Si $\tau = [FL^{-2}]$ y $t = [L]$, entonces $q = [FL^{-1}]$. Esto indica que el producto τt, no varía a lo largo del contorno cerrado de la sección.

Si se hace una analogía con el gasto hidráulico constante $Q = A_h V$ que fluye por un canal de sección rectangular con ancho de plantilla variable, en los tramos de menor ancho (espesor) de plantilla, las velocidades (esfuerzos), serán mayores y viceversa. A causa de esta analogía, la cantidad q se llama flujo de cortante.

Considerando la sección transversal del tubo, figura (c), se verifica que el flujo de cortante q multiplicado por la longitud infinitesimal ds del perímetro, da como resultado una fuerza qds por diferencial de longitud, que multiplicada por la distancia r a un punto conveniente 0, proporciona la contribución de esa longitud al momento torsionante resistente.



Integrando a lo largo de la línea central de la pared del tubo, la expresión para el momento torsionante resistente total queda como:

$$T = \oint rqds$$

Toda vez que para un tubo q es una constante, esta ecuación se puede escribir:

$$T = q\oint rds$$

En lugar de efectuar la integración, el problema se puede resolver de manera alternativa. De la figura (c) se observa que el producto rds es dos veces el área del triángulo OCB, por lo tanto la integral completa es dos veces el área completa A* delimitada por la línea central de la pared del contorno, por lo tanto:

$$T=2*q \quad \text{ó} \quad q=T/2A^{*}\ldots\ldots\text{ec (o)}$$

Esta ecuación conocida como fórmula de Bredt (quién la desarrolló) sólo es aplicable a secciones tubulares de pared delgada.

El esfuerzo cortante en cualquier punto del contorno, si t = q, es:

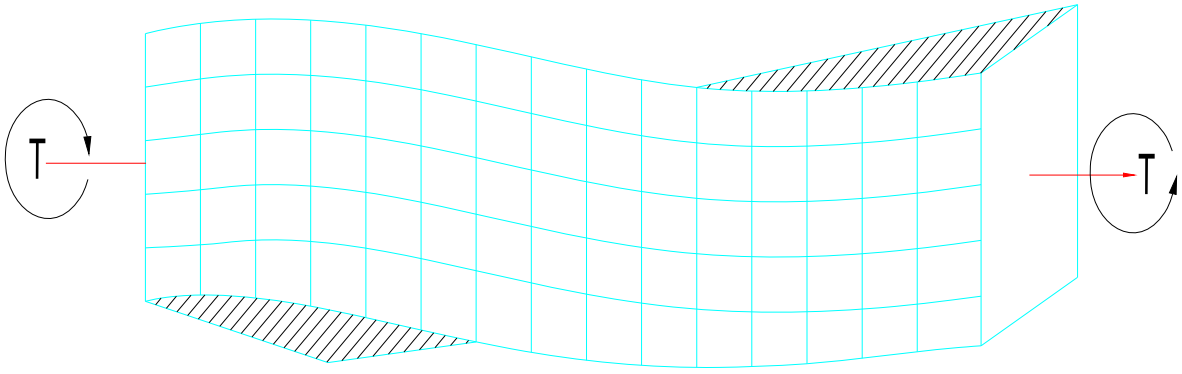
$$\tau = q/t \quad \text{y} \quad \tau \text{ máx}=q/t \text{ mín}\ldots\ldots\text{ec(p)}$$

Estas expresiones son utilizables también en el rango inelástico de los materiales si los espesores t de las secciones son constantes.

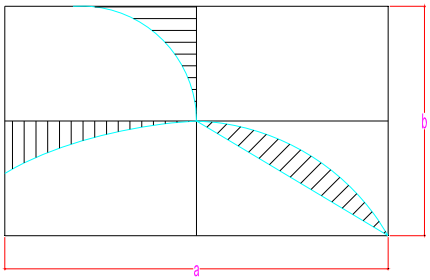
ANEXO.

Miembros de sección maciza no circular.

Al efectuar experimentos, aplicando torsión sobre miembros de secciones transversales rectangulares, que son los me mayor incidencia en el quehacer del Ingeniero Civil, se observa que las distorsiones son máximas sobre los puntos medios de los lados largos y casi nulas en las esquinas. Figuras a) y b). Este comportamiento es consecuencia de lo que expresa la ley de Hooke.



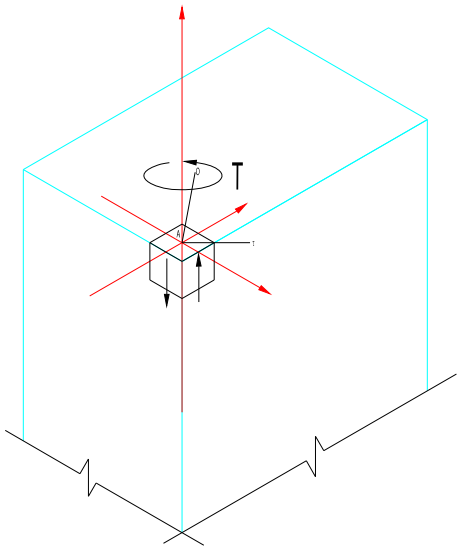
a)



b)

El hecho se puede explicar considerando un elemento infinitesimal en una de las esquinas de la sección, figura c) donde actúa un esfuerzo cortante τ en dirección perpendicular al radio AO. Este esfuerzo puede ser resuelto en dos componentes paralelas a los lados de la sección. De nueva cuenta, por la ley de la reciprocidad de los esfuerzos cortantes, deben aparece otros sobre las superficies exteriores, actuando de manera mutuamente perpendicular y opuesta a los anteriores. Pero como esto es imposible porque las caras

externas de la sección están libres, por lo tanto se concluye que los cortantes en las esquinas son cero.



c)

La solución de problemas de torsión en barras prismáticas presenta un grado de dificultad mayor que en barras circulares, por eso sólo se tiene algunos resultados finales calculados por métodos de la teoría de la elasticidad.

Como puede observarse en la figura b), los esfuerzos cortantes máximos, se presentan en el punto A, son menores en el B y nulos en las esquinas y se calculan con las dos expresiones mostradas a continuación, en tanto que para el ángulo de giro se usa la tercera ecuación de la derecha.

$$\tau_A = \tau_{máx} = \frac{T}{\alpha a b^2} \qquad \tau_B = n\,\tau_{máx} \qquad \Theta = \frac{TL}{\beta G a b^3} \quad \ldots\ldots(q)$$

$$\tau_{máx} = T / S_{pr}$$

Siendo $S_{pr} = \alpha a b^2$

Donde T=momento torsionante aplicado, a= lado mayor del rectángulo, b= lado menor de la sección. Los valores de los coeficientes α, β y η, que dependen de la relación a/b, se muestran en la tabla A.

Para perfiles compuestos por rectángulos largos y delgados donde a/b>>10, la característica geométrica Jr, se puede calcular con la expresión

$$Jr = \Lambda \frac{1}{3} \sum a b^3 \quad \ldots\ldots\ldots..(r)$$

Y el valor del ángulo de rotación se determina con

$$\Theta = \frac{TL}{JrG} \quad \text{.....(s)}$$

El valor de Jr para estos perfiles de pared delgada y sección abierta es pequeño comparando con el J para barras de sección circular sólida de igual área, es por esta razón que se debe evitar en lo posible el uso de miembros de sección abierta, en que el trabajo a torsión sea evidente.

Aquí **λ** es un coeficiente que depende de la forma de la sección. Algunos de sus valores se presentan en la tabla B.

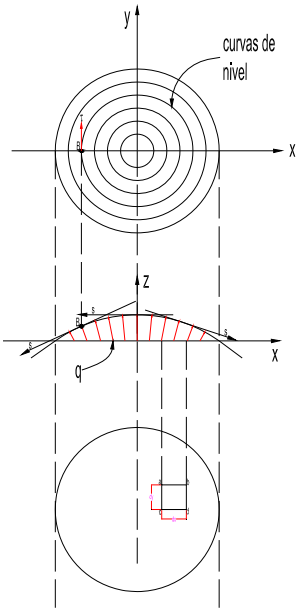
Tabla B: coeficientes λ para perfiles de pared delgada y sección abierta.

Tipo de sección	angular	doble t	te	canal
λ	1.0	1.2	1.15	1.12

Nociones sobre la analogía de la membrana.

Como ya se mencionó que la solución matemática del problema de torsión en miembros de secciones transversales sólidas no circulares es bastante complicada, se hizo necesario el desarrollo de métodos indirectos para su estudio. Uno de ellos es el de la **"analogía de la membrana"** propuesta por el Ingeniero alemán Prandt en 1903.

El método se basa en esto: independientemente de la forma de la sección transversal de la barra en análisis, la ecuación diferencial parcial que debe ser resuelta para el problema de torsión elástica es matemáticamente análoga, a la ecuación diferencial parcial a solucionar en el equilibrio de una membrana delgada, tal como una burbuja de jabón, ligeramente estirada cubriendo un agujero geométricamente semejante a la sección del miembro en estudio y sometida a una tensión unitaria s, por unidad de longitud en sus bordes y a una presión uniformemente distribuida q, en una de sus caras, como se muestra en la figura:



Considérese el elemento infinitesimal abcd; las fuerzas de tensión que actúan en los lados ad y bc tienen, en el caso de deflexiones pequeñas de la membrana una resultante dirigida hacia abajo con un valor

$$-S\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}dxdy$$

De la misma manera, las fuerzas de tensión que actúan en los lados ab y dc, tienen como resultante

$$-S\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}dxdy$$

Y la presión uniforme que actúa en el área abcd, tiene una resultante igual a + qdxdy.

La ecuación diferencial parcial de equilibrio del elemento es:

$$S\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}dxdy + S\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}dxdy + qdxdy = 0$$

Que simplificada queda:

$$\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}+\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}=-\frac{q}{S}\text{.....}ec(t)$$

Comparando esta ecuación con la siguiente, que se deduce para el cálculo de los efectos de la torsión en elementos de sección no circular.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = F$$

Donde ϕ es una función de esfuerzo y

$$F = -2G\theta$$

Si tanto G como θ conservan el significado citado con anterioridad, se concluye que ambos problemas, el de torsión en miembros de sección no circular y del equilibrio de la membrana delgada aquí planteado, se resuelven de manera idéntica.

Por lo tanto, de las deflexiones de la membrana z, se pueden obtener los valores de la función de esfuerzos ϕ, si el segundo miembro de la ecuación t, se sustituye por 2G θ.

El momento torsionante resistente puede obtenerse sustituyendo ϕ, por z en la siguiente ecuación:

$$T = 2\iint \phi dxdy, \qquad quedando\ T = 2\iint Z dxdy$$

Esta expresión indica que el momento torsionante **T** sobre una sección, es igual al doble del volumen comprendido entre la burbuja formada por la membrana y el plano xy.

Los puntos de igual deformación en la membrana se representan por "curvas de nivel". Tomando cualquier punto B sobre ella, se traza en él la tangente de máxima pendiente, normal a la curva de nivel en ese punto y aplicando la metodología de la teoría de la elasticidad, se puede llegar a estas conclusiones:

1ª. El esfuerzo cortante en cualquier punto de la sección, es proporcional a la pendiente en el mismo punto de la membrana deformada o estirada. El esfuerzo cortante máximo actúa en los puntos donde las "curvas de nivel" están más próximas.

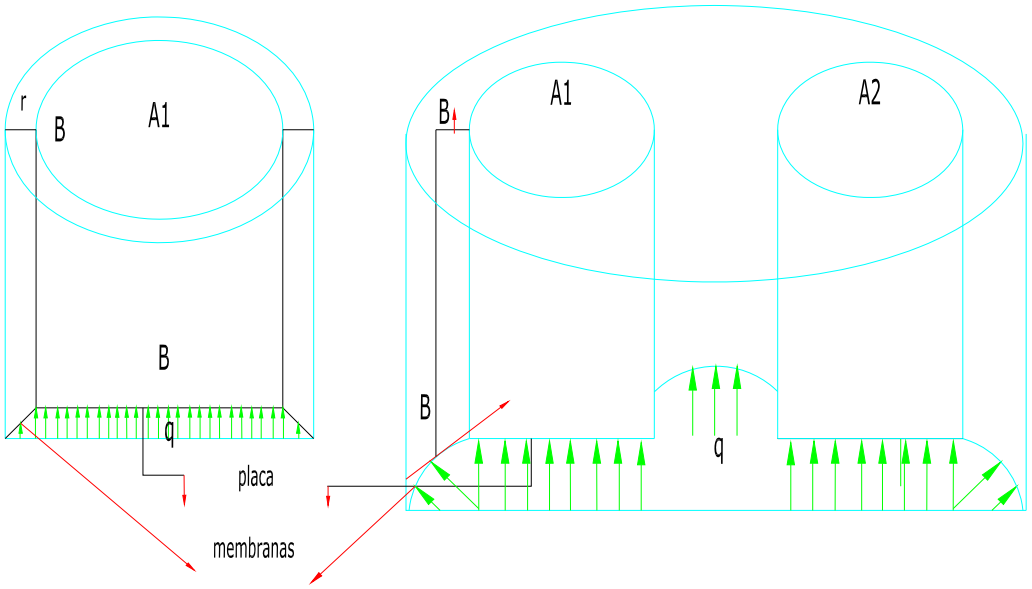
2ª. La dirección del esfuerzo cortante en cualquier punto, forma un ángulo recto con la pendiente de la membrana en el mismo punto.

Significa que es tangente a la curva de nivel que pasa por ese punto y en consecuencia, dicha curva representa también la línea de igual esfuerzo cortante en la sección transversal del miembro.

3ª. El momento torsionante resistente es igual a dos veces el volumen comprendido entre la burbuja descrita por la membrana deformada y su plano original.

La analogía de la membrana es una herramienta muy útil para determinar los esfuerzos y momentos torsionantes resistentes por elementos con diferentes formas de secciones transversales no circulares.

Tratándose de secciones no sólidas, con uno o más huecos, **la analogía de la membrana** puede ser presentada como sigue: las áreas Ai (i=1, 2, 3 …n) de la membrana, correspondientes a los huecos en la sección del miembro torsionado, son cubiertas por placas absolutamente rígidas de peso despreciable, que son pegadas a las membranas sin deformar. Al aplicar la presión uniformemente q, las placas Ai se levantan paralelamente a su posición original y la membrana queda como se muestra en la figura 10. Todo el desarrollo descrito para secciones huecas, respecto al uso de la herramienta, es aplicable a este caso.



establecer como deformación máxima permisible igual al claro dividido entre 360, con objeto de evitar deformaciones en cancelería que pueda fracturar cristales ó grietas en plafones, etc.

Objetivo(s):

Definir las deflexiones máximas permisibles de vigas de un solo material en función de la importancia estructural del elemento.

Desarrollo:

Adicionalmente a la capacidad de las vigas por resistencia, estas deben de comportarse adecuadamente por servicio, es decir, que funciona de manera adecuada sin provocar la percepción de incomodidad o inseguridad del usuario u ocupante de la estructura. Esto en vigas significa que sus deformaciones por flexión o flechas, deben estar limitadas, ya que pequeñas distorsiones pueden causar daños a elementos ligados a la misma y si estas resultan muy flexible pueden hasta vibrar causando sensaciones de inseguridad.

Un límite empírico del valor máximo de la deflexión(*), para cargas muerta más viva de servicio, es:

$$y_{adm} = \frac{L}{360}$$

Donde: L = Longitud del claro.

Este tiene como base en la experiencia y se especifica para evitar o limitar grietas que demeriten el aspecto en superficies enyesadas. Otros valores que se recomiendan para superficies no enyesadas tenemos:

Para construcción de pisos no enyesados el valor máximo de la deflexión es:

$$y_{adm} = \frac{L}{240}$$

Para construcción de techos no enyesados tenemos:

$$y_{adm} = \frac{L}{180}$$

(*) Especificaciones de diseño y construcción de estructuras de acero del American Institute of Steel Construction (AISC).

BIBLIOGRAFÍA

Beer, F., Johnston E. y de Wolf, J. (2004). Mecánica de materiales. México: Mc Graw-Hill.

Fitzgerald, R. (2007). Mecánica de materiales (16a ed.). México: Alfaomega.

Gere, James M. y Barry J. Goodno. (2009). Mecánica de materiales. (7ª. ed.). México: Cengage.

Vable, Madhukar. (2003). Mecánica de materiales. México: Oxford.

Ortiz Berrocal, Luis. (2007). Resistencia de materiales. (3. ed.). España: Me Graw Hill.

Riley, W., Sturges L. y Morris, D. (2001). Mecánica de materiales. México: Limusa.